Ecuaciones diferenciales de primer orden

13 de junio de 2023

Índice general

Capítulo 1

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.1. Ecuaciones de variables separadas

Definición 1.1.1. *Diremos que una ecuación diferencial de primer orden es separable si se puede escribir como:*

$$y' = g(y)f(x), \tag{1.1}$$

donde $f\colon (x) \to \mathbb{R}$ *y* $g\colon (y) \to \mathbb{R}$ *son funciones continuas.*

Lema 1.1.1. *La solución de una ecuación con variables separables es:*

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

Demostración:

$$\int \frac{1}{g(y(x))} y(x)' dx = \int f(x) dx$$

Aquí podría destacar que si uno busca videos en internet, estos se centran más en cómo resolver un ejemplo concreto que en la rigurosidad matemática. De esta forma es falso que se pueda integrar respecto a y a la izquierda y respecto a x a la derecha y se mantenga la igualdad. Se tiene que hacer lo mismo en ambos lados.

Ahora para resolver la primera integral realizaremos un cambio de variables: $u = y(x)$ de forma que $du = y(x)'dx$. Quedando

$$\int \frac{1}{g(u)} du = \int f(x) dx$$

Fijaros que si tuviéramos alguna x en el primer termino (es decir si no pudimos separar las variables) este cambio no podría hacerse.

Si cambiamos el nombre de la variable u por otro cualquiera, por ejemplo y:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

□

Observaciones:

Si escribimos la derivada y' (notación prima) de la forma $\dfrac{dy}{dx}$ (notación de Leibniz)

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$$

El termino $\dfrac{dy}{dx}$ no puede separarse. No es una fracción. Si multiplicamos la ecuación por dx tendríamos

$$\frac{1}{g(y)}y'dx = f(x)dx$$

Ahora, en el tema de Ecuaciones Diferenciales Exactas introduciremos el concepto de diferencial (dx) y su verdadero significado. Y que las solucines de la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{g(y)}y' = f(x)$$

son las mismas que las de la ecuación en forma diferencial

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

Pero aquí no podemos decir que integramos a izquierda y derecha, ya que habría que especificar integrar respecto a que variable. Y tendríamos:

$$\int \left(\frac{1}{g(y)}dy\right) dx = \int (f(x)dx)\, dx$$

Más observaciones:

A la hora de resolver el problema no hemos considerado el dominio donde esta definido el problema, y por tanto donde la solución tiene significado. De esta forma si tenemos:

$$\frac{1}{g(y)}y' = f(x) \quad \text{con}\, x \in D$$

Vemos que esta igualdad es cierta siempre y cuando $g(y) \neq 0$. Afortunadamente a la hora de integrar esta discontinuidad, si se produce únicamente en un número finito de puntos, no es capad de tenerla encuenta. Sin embargo si se produce un problema, y es que puede que perdamos soluciones. Ya que si p es un cero de $g(y)$ es decir $g(p) = 0$, entonces $y = p$ es solución del sistema.

Veamos un ejemplo pe esto:

Ejemplo 1.1.1.

$$y' = xy$$

En este caso, una vez identificada como ecuación separable:

$$\frac{1}{y}y' = x$$

la resolveriamos:

$$\int \frac{1}{y}dy = \int xdx$$

$$lny = \frac{1}{2}x^2 + Cte$$

Fijaros que aquí ambas integrales tienen una constante, pero podemos agruparlas en una única constante Cte.

Pero abría que tener cuidado, ya que 0 es una raíz de la función $g(y)$, o una asindota de la expresión $\frac{1}{y}$. Por tanto:

$$y = 0$$

Es una solución de la ecuación. Aunque en este ejemplo esta solución forma parte de la solución que habíamos dado, no siempre ocurre.

$$lny = \frac{1}{2}x^2 + Cte$$

$$y = e^{\left(\frac{1}{2}x^2 + Cte\right)} = e^{\left(\frac{1}{2}x^2\right)} e^{Cte} = Ce^{\left(\frac{1}{2}x^2\right)}$$

De forma que para $C = 0$ tenemos la solución que creíamos perdida.

1.2. Ecuaciones lineales

Ya hemos visto que una Ecuación Diferencial de orden 1 es lineal si se puede escribir cómo:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

con $a_1(x) \neq 0$ en I salvo quizá algún punto.

A la hora de resolver estas ecuaciones trabajaremos con la siguiente expresión:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

que resulta de dividir a izquierda y derecha por $a_1(x)$ y a la que llamaremos forma estándar.

Método de resolución de E.D.O. lineales de orden uno:
Dada la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Comenzaremos considerando la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

a la que llamaremos Ecuación Homogénea Afin (haciendo referencia a que cambiamos el $f(x)$ por cero).

Sea y_c una solución de esta ecuación que es separable y sabemos resolver.

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -P(x)$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -P(x)dx$$

$$lny = \int -P(x)dx + cte$$

$$y = c\, e^{\int -P(x)dx}$$

Ahora supondremos (la cual podría ser falso y llegaríamos a una contradicción) que la solución del problema puede escribirse como $y = u(x)y_1$ (a este método se dice variación de parámetros). Donde y_1 es una solución de la familia uniparamétrica de soluciones y_c que se obtiene al considerar $c = 1$.

Si sustituimos en nuestro problema:

$$\frac{d}{dx}\left[u(x)y_1\right] + P(x)\left[u(x)y_1\right] = f(x)$$

esto es:

$$\left(\frac{du}{dx}y_1 + u(x)\frac{dy_1}{dx}\right) + P(x)u(x)y_1 = f(x)$$

si agrupamos términos:

$$\frac{du}{dx}y_1 + u(x)\left(\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1\right) = f(x)$$

Como y_1 es solución de la ecuación homogénea afín el paréntesis vale cero.

$$\frac{du}{dx}y_1 + = f(x)$$

Ahora tenemos una ecuación separable respecto a $u(x)$ cuya solución es:

$$\int du = \int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx$$

Esto es

$$u = \int \frac{f(x)}{e^{\int -P(x)dx}}dx + cte$$

y por tanto la solución del problema es

$$y = u(x)y_1 = \int \frac{f(x)}{e^{\int -P(x)}}dx e^{\int -P(x)dx} + cte\, e^{\int -P(x)dx}$$

□

Ejemplo 1.2.1.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 2x$$

Calculamos y_1

$$y_1 = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-lnx+cte}$$

tomemos $cte = 0$ *ya que en la solución final quedaría todo multiplicado por* e^{cte}.

$$y_1 = \frac{1}{x}$$

Ahora

$$u(x) = \int \frac{2x}{\frac{1}{x}} dx + Cte = \frac{2}{3}x^3 + Cte$$

Y la solución sería

$$y = (\frac{2}{3}x^3 + Cte)\frac{1}{x} = \frac{2}{3}x^2 + Cte\,\frac{1}{x}$$

Resolución de E.D.O. lineales de orden uno: Aunque hemos visto el método de resolución de E.D.O lineales de orden uno y el por qué funciona, seguir esos pasos se hace en la práctica un tanto engorroso. Por eso aplicaremos ingeniería inversa al problema:

Si partimos de la solución:

$$y = \int \frac{f(x)}{e^{\int -P(x)}} dx e^{\int -P(x)dx} + cte\, e^{\int -P(x)dx}$$

$$y = \left(\int \frac{f(x)}{e^{\int -P(x)dx}} dx + cte\right) e^{\int -P(x)dx}$$

Despejando:

$$y\frac{1}{e^{\int -P(x)dx}} = \int \frac{f(x)}{e^{\int -P(x)dx}} dx + cte$$

$$ye^{\int +P(x)dx} = \int \frac{f(x)}{e^{\int -P(x)dx}} dx + cte$$

Esto sería una solución implicita, para comprobar que es solución derivaríamos:

$$\frac{dy}{dx}e^{\int +P(x)dx} + ye^{\int +P(x)dx}\,P(x) = \frac{f(x)}{e^{\int -P(x)dx}} = f(x)e^{\int +P(x)dx}$$

Si dividimos todo por $e^{\int P(x)dx}$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Por tanto para resolver un problema podemos hacer estos mismos pasos pero desde abajo hacia arriba:

1. Calculamos el factor de integración $FI = e^{\int P(x)dx}$
2. Multiplicamos Izquierda y Derecha por el Factor de Integración

$$\frac{dy}{dx}e^{\int +P(x)dx} + P(x)ye^{\int +P(x)dx} = f(x)e^{\int +P(x)dx}$$

3. Nos damos cuenta que el primer termino es la derivada de $FI \cdot y$:

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{\int +P(x)dx}\right] = f(x)e^{\int +P(x)dx}$$

4. Integramos respecto a x:

$$ye^{\int +P(x)dx} = \int f(x)e^{\int +P(x)dx}dx + cte$$

$\square$

Ejemplo 1.2.2.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 2x$$

Calculamos Factor de Integración

$$FI = e^{\displaystyle\int \frac{1}{x}dx} = e^{ln(x)} = x + cte$$

Ahora multiplicamos izquierda y derecha por el FI (tomamos cte = 0).

$$\frac{dy}{dx} \cdot x + \frac{1}{x}y \cdot x = 2x \cdot x$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = 2x^2$$

Y nos damos cuenta

$$\frac{d}{dx}[xy] = 2x^2$$

Recomiendo comprobar que la derivada del primer termino da realmente la ecuación anterior:

$$\frac{d}{dx}[xy] = x\frac{y}{dx} + y$$

ya que si nos hemos confundido al calcular FI aquí nos daremos cuenta. Finalmente integramos a ambos lados respecto a x.

$$xy = \int 2x^2dx + cte = \frac{2}{3}x^3 + cte$$

Misma solución que antes.

1.3. Ecuaciones exactas

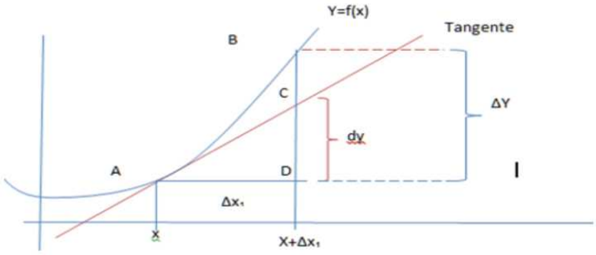
Veamos la interpretación geométrica de diferencial de una función: Sea $y = f(x)$ definimos la función

$$\begin{array}{rcl} df_c : (-\epsilon, \epsilon) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \triangle x & \longrightarrow & f'(c)\triangle x \end{array}$$

Esto es para cada punto c donde esta definida la derivada de la función $y = f(x)$ se define el df_c para valores muy pequeños como el incremento de la recta tangente cuando se evalúa en $c + \triangle x$.

Ahora como la función $y = x$ la recta tangente es la misma x se tiene que $dx_c(\triangle x) = \triangle x$

De esta forma vemos que



$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{df_c(\triangle x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{df_c(\triangle x)}{dx_c(\triangle x)} = f'(c)$$

Como esto es cierto para cualquier punto c se tiene que

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{df(\triangle x)}{dx(\triangle x)} = f'$$

o simplemente:

$$\frac{df}{dx} = f'$$

De esta forma podemos decir que:

$$df = f'dx$$

que nos recuerda a expresión utilizada en el cambio de variables de una integral cuando hacemos $f = f(x)$.

Definición 1.3.1 (**Diferencial de una función de dos variables**).
Sea f(x,y) una función de dos variables, con derivadas parciales en una región R del plano, se define diferencial de f como:

$$D[f(x,y)] = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Ejemplo 1.3.1. *Sea* $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ *entonces:*

$$D[f(x,y)] = (2x+y)dx + (2y+x)dy$$

Definición 1.3.2 (**Ecuación en forma diferencial**).
Sea M(x,y) y N(x,y) dos funciones de dos variables, definidas en una región R del plano, se define ecuación en forma diferencial aquella que tiene la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Definición 1.3.3 (**Ecuación exacta**).
Sea M(x,y) y N(x,y) dos funciones de dos variables, definidas en una región R del plano, se dice que la siguiente ecuación en forma diferencial es exacta:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Si exite una f(x,y) con derivadas parciales en R tal que:

$$D[f(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

Esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

De forma que una solución de la ecuación es:

$$f(x,y) = cte$$

Teorema 1.3.1 (**Método para identificar que una ecuación en forma diferencial es exacta**).
Dada una ecuación en forma diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es exacta si satisface:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Demostración. Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta significa que existe $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

En tal caso:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Que efectivamente son iguales.

□

Teorema 1.3.2 (**Método de resolución de ecuaciones exactas**).
Dada una ecuación en forma diferencial exacta:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Tenemos que encontrar la función $f(x,y)$ que cumple:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

Por tanto si:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$$

integrando respecto a x obtenemos

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + Cte$$

Ahora esta Cte no lo es tanto, ya que realmente puede depender de y. Ya que cumple que cuando se deriva respecto a x sale cero y una expresión como $Cte = y^2 + 1$ *lo cumple. Así que mejor reescribimos como:*

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$

Pero aun no hemos usado la otra propiedad:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

Por tanto derivando respecto a y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\int M(x,y)dx + g(y)] = N(x,y)$$

despejando:

$$\frac{dg}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial \int M(x,y)dx}{\partial y}$$

Cabe resaltar de nuevo que $g(y)$ *es una función que no tiene x por tanto su derivada tampoco. Asi que la expresión*

$$N(x,y) - \frac{\partial \int M(x,y)dx}{\partial y}$$

Sólo depende de y (si aparecen x, nos hemos confundido en las cuentas). Ahora ya sólo queda integrar respecto a y:

$$g(y) = \int N(x,y) - \frac{\partial \int M(x,y)dx}{\partial y} dy + Cte$$

La solución sera $f(x,y) = cte$ *esto es:*

$$\int M(x,y)dx + \int N(x,y) - \frac{\partial \int M(x,y)dx}{\partial y} dy = cte$$

Ejemplo 1.3.2.

$$(2xy)dx + (x^2 - 1)dy = 0$$

Primero veamos si es exacta para ello haremos derivadas cruzadas. La que tiene dx derivaremos respecto a y y viceversa.

$$\frac{\partial (2xy)}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial (x^2 - 1)}{\partial x} = 2x$$

Por tanto si es exacta. Ahora escogemos que termino preferimos integrar.

$$f(x,y) = \int (2xy)dx = x^2 y + g(y)$$

La función g(y) es contante respecto a la variable de la integración, en este caso x.

Ahora usamos la otra identidad:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial x^2 y + g(y)}{\partial y} == (x^2 - 1)$$

Es decir:

$$x^2 + g'(y) = (x^2 - 1)$$

y por tanto:

$$g'(y) = -1 \Rightarrow g(y) = \int -1 dy = -y + Cte$$

Ahora la solución es:

$$x^2 y + g(y) = x^2 y - y = Cte$$

Teorema 1.3.3 (**Equivalencia entre E.D.O de orden 1 y ecuaciones en forma diferencial**).
Las ecuación en forma diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Y la E.D.O de orden 1:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

tienen las mismas soluciones.

1.4. Ecuaciones que se transforman en exactas por factor de integración

Recordamos en las ecuaciones lineales $y' + P(x)y = f(x)$ multiplicábamos a izquierda y derecha por un Factor de Integración para transformar la ecuación. Si seguimos esta idea nos preguntamos si existirá un factor de la forma $\mu(x,y)$ tal que dada la ecuación en forma diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

al multiplicarla a izquierda y derecha:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

Nos de una ecuación exacta. Para ello necesitaríamos que:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)M(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)N(x,y)\right]$$

$$\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y}M(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x}N(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Que nos da una Ecuación en Derivadas Parciales más complicada de resolver. Tampoco resulta sorprendente, ya que de existir este factor todas las ecuaciones podríamos resolverlas con este método.

Teorema 1.4.1 (Método de transformación de ecuaciones a exactas por factor de integración).
Dada la ecuación en forma diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Que ocurriría si pudiéramos encontrar un Factor de Integración de la forma $\mu(x)$. En este caso la ecuación tendría que cumplir:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)M(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x)N(x,y)\right]$$

Pero ahora la derivada respecto a y sería cero:

$$\mu(x)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{d\mu(x)}{dx}N(x,y) + \mu(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Despejando

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}\mu(x)$$

Para que esta ecuación tenga sentido, como la parte de la izquierda sólo tiene x la parte de la derecha tiene que comportarse igual.

Sólo existirá este Factor de Integración si:

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} \text{ solo tiene } x$$

En tal caso tenemos ahora una ecuación separable que hay que resolver para encontrar $\mu(x)$

De forma análoga se puede calcular un $\mu(y)$ quedando ahora

$$\frac{d\mu(y)}{dy} = \frac{\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)}\mu(y)$$

si la expresión:

$$\frac{\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)} \text{ solo tiene } y$$

Ejemplo 1.4.1.

$$(xy)dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0$$

Comprobamos si es exacta

$$\frac{\partial}{\partial y}[xy] = \frac{\partial}{\partial x}[2x^2 + 3y^2 - 20]$$

Cómo no lo es, veremos:

- *Si la resta de la primera derivada menos la segunda derivada dividido por el segundo diferencial depende sólo de x (la variable contraria a dy).*

$$\frac{x-4x}{2x^2+3y^2-20} \text{ si depende solo de } x$$

- *o si la resta de la segunda derivada menos la primera derivada (la misma que antes pero con signo contrario) dividido por el primer diferencial depende sólo de y (la variable contraria a dx)*

$$\frac{4x-x}{xy} = \frac{3}{y} \text{ si depende solo de } y$$

Cómo es el segundo caso buscaremos una $\mu(y)$ de forma que

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{3}{y}\mu$$

Ecuación separable cuya solución es:

$$\int \frac{1}{\mu} d\mu = \int \frac{3}{y} dy$$

$$ln\mu = 3lny + Cte \Rightarrow \mu = e^{3lny+Cte} = e^{3lny}e^{Cte} = cte\ y^3$$

De forma que multiplicando por el Factor de Integración y^3 la ecuación:

$$(xy^4)dx + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20)dy = 0$$

es exacta, efectivamente cuando hacemos las derivadas cruzadas:

$$(4xy^3) = (4xy^3)$$

Ahora sólo quedaría resolverlo. Ya que este método no resuelve la ecuación. Sólo la transforma en otra ecuación que si sabemos resolver.

1.5. Soluciones por cambio de variable

Otra de las opciones que tenemos para resolver una EDO es realizar un cambio de variables de la forma $y(x) = g(x, u(x))$ de forma que la ecuación diferencial se transforma en otra que tal vez sepamos resolver.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dx}$$

Veamos si podemos identificar tipos de ecuaciones que se puedan transformar en una ecuación que sabemos resolver con un cambios de variables específico.

Definición 1.5.1 (Función homogénea).
Dada una función de dos variables $f(x, y)$ diremos que es una función homogenea si cumple la siguiente propiedad:

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

Al valor de α se le llama grado.

Ejemplo 1.5.1. *La función* $f(x,y) = xy + x^2$ *es homogénea de grado 2.*
En efecto $f(tx,ty) = (tx)(ty) + (tx)^2 = t^2xy + t^2x^2 = t^2 f(x,y)$

Definición 1.5.2 (Ecuaciones con funciones homogéneas).
Dada una ecuación en forma diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Diremos que es una ecuación con funciones homogeneas, o simplemente Ecuación homogenea, si $M(x,y)$ *y* $N(x,y)$ *son funciones homogeneas del mismo grado* α*.*

Aquí hay que tener cuidado de no confundir cuando una ecuación en derivadas ordinarias lineal es homogénea (cuando $f(x) = 0$) con una ecuación en forma diferencias con funciones homogéneas, aunque se llamen ambas igual.

Teorema 1.5.1 (Método para transformar una ecuación homogénea en separable).
Dada una ecuación en forma diferencias homogénea, esto es:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

con

$$M(tx,ty) = t^{\alpha}M(x,y) \quad \text{y} \quad M(tx,ty) = t^{\beta}M(x,y)$$

funciones homogéneas y $\alpha = \beta$ *del mismo grado. Entonces el cambio* $u = y/x$ *o* $v = x/y$ *transforma la ecuación en separable.*

Demostración. Demostrémoslo para $u = y/x$ o escrito de otra forma $y = ux$. En tal caso tenemos

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

Esta relación escrita en forma diferencial:

$$dy = udx + xdu$$

y la ecuación quedaría:

$$M(x,xu)dx + N(x,xu)(udx + xdu) = 0$$

Como M y N son homogéneas de grado α

$$x^{\alpha}M(1,u)dx + x^{\alpha}N(1,u)(udx + xdu) = 0$$

agrupando términos:

$$x^{\alpha}(M(1,u) + uN(1,u))dx + xx^{\alpha}N(1,u)du = 0$$

Si la escribimos como una EDO:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x^{\alpha}(M(1,u) + uN(1,u))}{xx^{\alpha}} = -\frac{1}{x}\frac{M(1,u) + uN(1,u)}{N(1,u)}$$

que es una ecuación separable. □

Ejemplo 1.5.2. *Resolver* $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

Como primer paso identificamos si M *y* N *son funciones homogéneas del mismo grado* α*.*

$$M(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2M(x, Y)$$

$$N(tx, ty) = (tx)^2 - (tx)(ty) = t^2x^2 - t^2xy = t^2N(x, Y)$$

Entonces es que podemos hacer el cambio de variable $y = ux$

$$(x^2 + x^2u^2)dx + (x^2 - x^2u)(udx + xdu) = 0$$

Agrupamos terminos y dividimos por x^2 *a izquierda y derecha:*

$$(1 + u^2)dx + u(1 - u)dx + x(1 - u)du = 0$$

$$(1 + u^2) + u(1 - u)dx + x(1 - u)du = 0$$

y reescribimos como EDO:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}\frac{(1 + u^2) + u(1 - u)}{(1 - u)} = -\frac{1}{x}\frac{(1 + u)}{(1 - u)}$$

que es separable.

Definición 1.5.3 (**Ecuaciones de Bernoulli**).
Dada una ecuación en derivadas ordinarias de orden uno en forma estandar, se dirá que es una ecuación de Bernoulli si se puede escribir como:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

Con $n \in \mathbb{R}$ *y* $n \neq 0$ *y* $n \neq 1$ *ya que entonces sería lineal.*

Teorema 1.5.2 (**Método para transformar una ecuación de Bernoulli en lineal**).
Dada una ecuación de Bernoulli, esto es:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

El cambio $u = y^{1-n}$ *transforma la ecuación en lineal.*

Demostración. En efecto si derivamos respecto a x obtenemos

$$\frac{du}{dx} = (1 - n)y^{1-n-1}\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo en varios pasos:

$$\frac{1}{1-n}y^n\frac{du}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

dividimos por y^n

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x)$$

y finalmente terminamos de hacer el cambio de variables:

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx} + P(x)u = f(x)$$

Que es lineal. □

Ejemplo 1.5.3. *Resolver* $x\dfrac{dy}{dx}+y=x^2y^2$ *Primero se escribe en forma estandar:*

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=xy^2$$

Realizamos el cambio de variable $u=y^{1-2}$ *y por tanto* $\dfrac{du}{dx}=-y^{-2}\dfrac{dy}{dx}$ *Sustituimos en dos pasos:*

$$(-y^2)\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}y=xy^2$$

dividimos por $(-y^2)$*:*

$$\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}u=-x$$

Es una ecuación lineal con factor de integración $FI=e^{\int -x^{-1}dx}=x^1$

$$\frac{1}{x}u=\int -1dx+cte=-x+cte$$

deshaciendo el cambio de variable

$$\frac{1}{x}y^{-1}=-x+cte$$

Teorema 1.5.3 (Sustitución directa).
Dada una ecuación en derivadas ordinarias escrita en forma normal, si es de la forma:

$$\frac{dy}{dx}=f(Ax+By+C)$$

El cambio $u=Ax+By+C$ *transforma la ecuación en separable.*

Ejemplo 1.5.4. *Resolver* $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+2y+1}{2x+4y}$

Nos damos cuenta que el segundo termino se puede expresar de la forma $u=x+2y$*:*

$$\frac{x+2y+1}{e^{2x+4y}}=\frac{u+1}{2u}$$

Por tanto con ese cambio tendríamos $\frac{du}{dx}=1+2\dfrac{dy}{dx}$

Si sustituimos en la ecuación:

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx}-\frac{1}{2}=\frac{u+1}{2u}$$

Escrito en forma normal,

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx}=2\frac{u+1}{2u}+1=\frac{u+1+u}{u}$$

cuya solución es:

$$\int\frac{u}{2u+1}du=\frac{1}{2}\int\frac{u}{u+1/2}du=\frac{1}{2}\int 1-\frac{1/2}{u+1/2}du=\int 1dx$$

$$\frac{1}{2}(u-\frac{1}{2}ln(u+1/2))=x+Cte$$

$$\frac{1}{2}(x+2y-\frac{1}{2}ln(x+2y+1/2)) = x + Cte$$

Con posible perdida de solución:

$$u = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x + 2y = -\frac{1}{2}$$

1.6. Aplicaciones de las Ecuaciones en Derivadas Ordinarias

Definición 1.6.1 (Trayectoria ortogonal).
Dada una familia de curvas uniparamétrica, $f(x,y,c) = 0$ diremos que una curva C es una trayectoria ortogonal si en cada punto de la curva C corta ortogonalmente a la familia uniparamétrica de curvas.

Dadas dos familias de curvas uniparamétricas $f_1(x,y,c) = 0$ y $f_2(x,y,c) = 0$ diremos que f_2 son las trayectorias ortogonales de f_1 si estas cortan ortogonalmente en todos los puntos y en todas las curvas de f_2 a f_1.

Dada la recta $y = mx+b$ la ecuación de la recta ortogonal sería $y = \frac{-1}{m}x+b$ que tiene como pendiente $\dfrac{-1}{m}$

Si $f(x,y,c) = 0$ es una familia uniparamétrica tomando diferenciales:

$$D[f(x,y,c)] = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

Usando otra notación:

$$f_x dx + f_y dy = 0$$

Que tiene las mismas soluciones que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

Esta ecuación en derivadas ordinarias nos dice que la pendiente de las curvas es $m = -\dfrac{f_x}{f_y}$ y su solución es $f(x,y,c) = 0$.

Ahora, si escribimos la ecuación con pendiente $\dfrac{-1}{m}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_y}{f_x}$$

Su solución será una familia de curvas uniparamétrica de trayectorias ortogonales a $f(x,y,c) = 0$.

Ejemplo 1.6.1.
Calcular las trayectorias ortogonales a $y^2 + x^2 = c$

Tomamos diferenciales a ambos lados:

$$2xdx + 2ydy = 0$$

Calculamos la ecuación de las trayectorias ortogonales

$$2ydx - 2xdy = 0$$

Fijaros que es suficiente en forma diferencial con cambiar la M por la N y el signo de una de ellas:

$$2xdx + 2ydy = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y}$$

Ecuación ortogonal:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{2x} \rightarrow 2ydx - 2xdy = 0$$

Esta ecuación es exacta por factor de integración:

$$FI = e^{\int \frac{4}{-2x} dx} = x^-2$$

Ahora la ecuación es exacta:

$$2x^-2ydx - 2x^-1dy = 0$$

Cuya solución es:

$$f(x, y) = \int -2x^-1dy = -2x^-1y + h(x)$$

Derivando respecto a x:

$$2x^-2y + h'(x) = 2x^-2y$$

$$h(x) = cte$$

La solución es:

$$-2x^-1y = Cte$$

Que despejando:

$$y = Ctex + 0$$

Las trayectorias ortogonales de circulos son rectas que pasan por en eje de coordenadas.

Ejemplo 1.6.2.
Calcular las trayectorias ortogonales a $y = cx^2$

Tomamos diferenciales a ambos lados:

$$dy = 2xcdx \rightarrow dy - 2xcdx = 0$$

Esto aun no es una ecuación en forma diferencial, son infinitas ecuaciones ya que dependen del parametro c.

si despejamos c de la primera ecuación: $c = \frac{y}{x^2}$

$$dy - 2x\frac{y}{x^2}dx = 0$$

$$dy - 2\frac{y}{x}dx = 0$$

La ecuación ortogonal es:

$$2\frac{y}{x}dy + dx = 0$$

que es separable:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

cuyas soluciones son:

$$\int 2ydy = -\int xdx + cte$$

su solución es:

$$y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + Cte$$