Curso Calculo III

José Laguardia

6 de agosto de 2013

Índice general

1. Sistemas de ecuaciones lineales **7**
1.1. Interpretación geométrica 7
1.2. Sistemas de ecuaciones lineales 8
1.3. Matrices y Operaciones elelementales de filas 9
1.4. Matrices escalonada 11
1.5. Eliminación Gaussiana 13
1.6. Método de Gauss-Jordan 14

2. Matrices y sus operaciones **17**
2.1. Operaciones básicas 17
2.2. Tipo de matrices 19
2.3. Matrices invertibles 21
2.4. Determinantes 23

3. Espacios vectoriales **29**
3.1. Definiciones previas 29
3.2. Espacios vectoriales 32
3.3. Espacio euclideo 33
3.4. Bases de espacios euclideos 35
3.5. Producto cruz o vectorial 42

4. Transformaciones lineales **43**
4.1. Definiciones 43
4.2. Forma matricial de una aplicación lineal 44
4.3. Valores y vectores propios 45

Introducción

Este material forma parte del curso de calculo III impartido en la universidad tecnológica de Panamá cuyo contenido esta formado por:

1. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales.
2. Vectores en $\mathbf{R}^n$
3. Determinantes, valores propios y vectores propios
4. Calculo diferencial de funciones de más de una variable
5. Campos vectoriales
6. Integración multiple
7. Integración de funciones vectoriales

Los tres primeros temas se dan en los tres primeros parciales en un tiempo estimado de 11 semanas que corresponde a unas 33 horas. Mientras que el resto de los temas se dan en 4 semanas en 9 horas (debido a los días festivos).

Capítulo 1

Sistemas de ecuaciones lineales

El álgebra lineal es una de las ramas de las matemáticas que estudia conceptos tales como vectores, matrices, sistemas de ecuaciones lineales y en un enfoque más formal, espacios vectoriales y sus transformaciones lineales.

1.1. Interpretación geométrica

Si recordamos la ecuación de una recta viene definida por $y = mx + c$ donde m es la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \; si \; x_1 \neq x_2$$

Se puede reescribir la ecuación como $ax + by = c$ de forma que si tenemos dos rectas podemos calcular su punto de corte (si lo hubiera) resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

1.2. Sistemas de ecuaciones lineales

En matemáticas y álgebra lineal, un sistema con m ecuaciones lineales y n incógnitas puede ser escrito en forma normal como:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{array} \tag{1.1}$$

Donde $x_1, \dots, x_n$ son las incógnitas y los números $a_{ij} \in \mathbb{R}$ son los coeficientes del sistema.

Definición 1.1 (Solución de un sistema de ecuaciones lineal)**.**

Toda n-tupla de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ que satisface cada una de las ecuaciones de (1.1) se llama solución del sistema.
■

Definición 1.2 (Sistema de ecuaciones lineal homogéneo)**.**

Si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ se dice que el sistema es homogéneo .
■

Tal vez, la técnica general para encontrar soluciones de un sistema de ecuaciones lineales es la técnica de eliminación, por ejemplo dado el siguiente sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Si multiplicamos la segunda ecuación por (-2) y se la sumamos a la primera, se obtiene

$$-7x_2 - 7x_3 = 0$$

es decir $x_2 = -x_3$ Analogamente si multiplicamos por (3) la primera ecución y se la sumamos a la segunda se obtiene

$$7x_1 + 7x_3 = 0$$

De donde $x_1 = -x_3$ se concluye diciendo que el conjunto de soluciones consta de todas las ternas de la forma $(-a, -a, a)$.

Deseamos generalizar este proceso de forma que se pueda entender por qué opera para así poder llevar a cabo los cálculos necesarios para resolver un sistema de manera sistemática.

Definición 1.3 (Combinación lineal de ecuaciones)**.**

Para el sistema de ecuaciones lineales (1.1) a cualquier combinación de la forma

$$(c_1a_{11} + \cdots + c_ma_{m1})x_1 \quad \dots \quad +(c_1a_{1n} + \cdots + c_ma_{mn})x_n \quad = (c_1b_1 + \dots c_mb_m)$$

Con $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias se llama combinación lineal.
■

Definición 1.4 (Sistema de ecuaciones lineal equivalentes)**.**

Se dira que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si cada ecuación de cada sistema es combinación lineal de las ecuaciones del otro sistema y tienen exactamente las mismas soluciones.
■

Ejemplo 1.2 (Sistemas no equivalentes)**.**

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}\right. y \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

1.3. Matrices y Operaciones elelementales de filas

Es posible reescribir el sistema (1.1) separando con coeficientes con notación matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Si representamos cada matriz con una única letra obtenemos:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Definición 1.5 (Matriz)**.**

Una matriz es una arreglo bidimensional de números (llamados entradas de la matriz) ordenados en filas y columnas, donde una fila es cada una de las líneas horizontales de la matriz y una columna es cada una de las líneas verticales.
■

Definición 1.6 (Tamaño de una matriz, $m \times n$)**.**

A una matriz con m filas y n columnas se le denomina matriz m-por-n (escrito $m \times n$) donde $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. El conjunto de las matrices de tamaño $m \times n$ se representa como $\mathcal{M}_{m \times n}$

El tamaño de una matriz siempre se da con el número de filas primero y el número de columnas después.
■

Dos matrices se dice que son iguales si tienen el mismo tamaño y las mismas entradas.

Definición 1.7 (Matriz de coeficientes)**.**

Dado un sistema de ecuaciones lineales (1.1) llamaremos matriz de coeficientes a:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

■

Definición 1.8 (Matriz aumentada)**.**

Dado un sistema de ecuaciones lineales con notación matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a la matriz ($\mathbf{A} \mid \mathbf{B}$) construida de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

se llama matriz aumentada o matriz ampliada.
■

Ejemplo 1.3 (Matriz aumentada)**.**
Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2 \\ 6x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 11 \end{cases}$$

la matriz aumentada estaría formada por:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

dando como resultado final:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 3 & 4 & 7 & | & 2 \\ 6 & 5 & 9 & | & 11 \end{pmatrix}$$

Definición 1.9 (Operaciones elementales de filas)**.**

1. Multiplicar una fila de $\mathbf{A}$ por un escalar c diferente a cero.
2. Reemplazar la r-ésima fila de $\mathbf{A}$ por la fila r más c veces la fila s. (Donde c es cualquier escalar y r$\neq$s)
3. Intercambiar dos filas de $\mathbf{A}$.

$\blacksquare$

Ejemplo 1.4 (Operaciones elementales de filas)**.**
Supongamos que es necesario encontrar las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x & +y & -z & = & 8 \\ -3x & -y & +2z & = & -11 \\ -2x & +y & +2z & = & -3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 8 \\ -3 & -1 & 2 & | & -11 \\ -2 & 1 & 2 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3]{\substack{f_1 \\ 3f_1+f_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 8 \\ 0 & 2 & -1 & | & 13 \\ -2 & 1 & 2 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_1 \\ f_2 \\ 2f_1+f_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 8 \\ 0 & 2 & -1 & | & 13 \\ 0 & 3 & 0 & | & 13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{f_1 \\ f_2 \\ 3f_2-2f_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 8 \\ 0 & 2 & -1 & | & 13 \\ 0 & 0 & -3 & | & 13 \end{pmatrix}$$

La solución sera $(8, \frac{13}{2}, \frac{-13}{3})$.

Definición 1.10 (Matrices equivalentes por filas)**.** Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos matrices del mismo tamaño $m \times n$ se dice que son equivalentes por filas si se puede transformar $\mathbf{A}$, mediante sucesión finita de operaciones elementales filas, $\mathbf{B}$.
$\blacksquare$

Teorema 1.11. *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son dos matrices del mismo tamaño* $m \times n$ *equivalentes por filas entonces los sistemas:*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$$

son equivalentes.

1.4. Matrices escalonada

Definición 1.12 (Matriz escalonada)**.**
En álgebra lineal una matriz $m \times n$ se dice que es escalonada si:

1. Todas las filas cero están en la parte inferior de la matriz.
2. El primer elemento no nulo de cada fila, llamado pivote, está a la derecha del pivote de la fila anterior (esto supone que todos los elementos debajo de un pivote son cero).

■

Ejemplo 1.5 (Matriz escalonada)**.**

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Definición 1.13 (Matriz reducida)**.**
Una matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $m \times n$ se llama reducida por filas si:

1. El primer elemento no nulo (pivote) de cada fila no nula de $\mathbf{A}$ es igual a 1.
2. Cada columna de $\mathbf{A}$ que tiene el pivote de alguna fila tiene todos sus otros elementos 0.

■

Ejemplo 1.6 (De matrices no reducidas)**.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La primera matriz es no reducida porque la columna tres tiene un elemento no nulo, la segunda porque en la tercera columna tiene un pivote distinto a 1.

Ejemplo 1.7 (De matrices reducidas)**.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Definición 1.14 (Matriz escalon reducida por filas)**.**
Una matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $m \times n$ se llama matriz escalón reducida por filas si:

1. $\mathbf{A}$ es una matriz reducida por filas.
2. Toda fila de $\mathbf{A}$ que tiene todos sus elementos 0 esta debajo de todas las filas que tienen elementos no nulos.
3. Si dos filas i, j con $i < j$ de $\mathbf{A}$ tienen un elemento no nulo (pivote) entonces la columna donde se encuentra el pivote de i esta antes de la columna del pivote de j.

■

Ejemplo 1.8 (De matrices escalón reducida por fila)**.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.15. *Toda matriz* **A** *se pude transformas mediante operaciones elementales de filas a una matriz escalon reducida por fila.*

Definición 1.16 (Rango de una matriz)**.**
Se llama rango de una matriz **A** de tamaño $m \times n$ al número de pivotes no nulos que tenga uma matriz **B** escalon reducida por fila obtenida mediante operaciones elementales de filas de A.
■

1.5. Eliminación Gaussiana

Un sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Gauss cuando se obtienen sus soluciones mediante la reducción del sistema dado a otro equivalente en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior.

Es decir, dado un sitema de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Transformando la matriz aumentada mediante operaciones elementales en una matriz escalonada.

Ejemplo 1.9 (Eliminación Gaussiana)**.**

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & 2 \\ 2x & -y & +z & = & -2 \\ 3x & +y & -2z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3]{\substack{f_1 \\ f_1 - f_2}} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{f_1 \\ f_2 \\ 3f_1 - 2f_3}} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{f_1 \\ f_2 \\ f_2 - 2f_3}} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -24 \end{array}\right)$$

Quedando el siguiente sistema de ecuaciones equivalente

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & 2 \\ & 2y & -2z & = & 0 \\ & & -4z & = & -24 \end{array}\right.$$

Resolviendolo desde la última ecuación y sustituyendo los valores en la anterior se llega sucesivamente a la solución: $(1, 6, 6)$

Ejemplo 1.10 (Eliminación Gaussiana)**.**

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +3y & -z & +t & = & 1 \\ 2x & +5y & +z & -t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[2f_1 - f_2]{f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Quedando el siguiente sistema de ecuaciones equivalente

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & +3y & -z & +t & = & 1 \\ & y & -3z & +3t & = & 3 \end{array}\right.$$

Siendo la soulución $(-8-8a+8b, 3+3a-3b, a, b)$ donde ayb son dos números reales arbitrarios.

Definición 1.17 (Sistemas incompatible y compatible)**.**
Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es compatible cuando tiene al menos una solución e incompatible cuando no tiene ninguna solución.
■

Definición 1.18 (Sistemas determinados)**.** Se dice que un sistema de ecuaciones lineales compatible cuando tiene solución única .
■

Definición 1.19 (Sistemas indeterminados)**.** Se dice que un sistema de ecuaciones lineales compatible cuando tiene infinitas soluciones .
■

1.6. Método de Gauss-Jordan

El Método de Gauss - Jordan o también llamado eliminación de Gauss-Jordan, es un método por el cual pueden resolverse sistemas de ecuaciones lineales con n ecuaciones y n incognitas compatibles y determinados.

Y consiste en transformar la matriz aumentada mediante operaciones elementales en una matriz escalon reducida por filas.

Ejemplo 1.11 (Eliminación Gauss-Jordan)**.**

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 2x & +y & -z & = & 2 \\ 2x & -y & +z & = & -2 \\ 3x & +y & -2z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_1 - f_2 \\ f_3}]{f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2 \\ 3f_1 - 2f_3}]{f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_2 \\ f_2 - 2f_3}]{f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -24 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_3 - 2f_2 \\ f_3}]{f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & -4 & -24 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2 \\ f_3}]{f_3 - 4f_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & -4 & 0 & -32 \\ 0 & -4 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & -4 & -24 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2 \\ f_3}]{f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & -4 & -24 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{1/8 f_1 \\ -1/4 f_2 \\ -1/4 f_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Llegando a un sistema de ecuaciones lineales equivalente de la forma:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 6 \\ & & z & = & 6 \end{array}\right.$$

Y por tanto tiene como solución: $(1, 6, 6)$

Capítulo 2

Matrices y sus operaciones

2.1. Operaciones básicas

Definición 2.1 (Conjunto de matrices mxn)**.**
Si representamos por K un conjunto de números, se representa por $M_{mn}(K)$ el conjunto de las matrices de m filas y n columnas que tienen números de ese conjunto. Introducimos la notación general de una matriz:

$$A = (a_{ij}) \;\; i \in \{1, 2, ...m\}, \; j \in \{1, 2, ...n\}$$

■

Si en el conjunto K hay una suma, también ciertas matrices se pueden sumar, pero para eso tienen que tener el mismo número de filas y de columnas. La suma no es una operación en el conjunto de todas las matrices sino en $M_{mn}(K)$ cuando se han fijado m y n.

Definición 2.2 (Suma de matrices)**.**
Sean A y B dos matrices de $M_{mn}(K)$, es decir con el mismo número de filas y columnas. Entonces se define la suma de las matrices como:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \;\; i \in \{1, 2, ...m\}, \; j \in \{1, 2, ...n\}$$

■

Cumpliendo las siguientes propiedades:

1. La suma es asociativa si la suma en K lo es.

2. La matriz cero (que tiene cero en todos los sitios), es elemento neutro para la suma si cero es el elemento neutro de K respecto a su suma.

3. Si cada elemento de K tiene elemento opuesto respecto a la suma, cada matriz tiene elemento opuesto.

Ejemplo 2.1 (Suma de matrices).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Definición 2.3 (Producto de una matriz por un escalar).
Sean A una matriz de $M_{mn}(K)$, y λ un número de K. Entonces se define el producto de λ por A como:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \;\; i \in \{1, 2, ...m\}, \; j \in \{1, 2, ...n\}$$

■

Ejemplo 2.2 (Producto de un escalar por una matriz).

$$4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 2.4 (Producto interno o producto punto de dos matrices).
Sean A una matriz de $M_{mn}(K)$ y B una matriz de $M_{nu}(K)$. Entonces se define el producto interno o producto punto de A por B como:

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \;\; i \in \{1, 2, ...m\}, \; j \in \{1, 2, ...u\}$$

■

Ejemplo 2.3 (Producto de dos matrices).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observamos que para poder multiplicar dos matrices $A \cdot B$ es necesario que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B. Por tanto obtenemos un resultado sorprendente y es que no sólo $A \cdot B \neq B \cdot A$ sino que este segundo producto no tiene ni porque existir.

Definición 2.5 (Matriz cuadrada).
Diremos que una matriz A de $M_{mn}(K)$ es cuadrada cuando tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir, $m = n$ ■

Estudiemos como se comporta el producto punto en el conjunto de matrices cuadradas:

Teorema 2.6 (Propiedades del producto punto en $M_{mm}(K)$).

1. *El producto es asociativo si el producto en K lo es: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.*

2. *El producto es distributivo respecto a la suma de matrices si el producto de K lo es respecto a la suma:*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

3. *El producto es asociativo respecto al producto por los elementos de K si el producto en K lo es:*

$$\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B, \quad (A \cdot B)\lambda = A \cdot (B\lambda)$$

Definición 2.7 (Matriz traspuesta)**.**
Sea A una matriz con m filas y n columnas. La matriz transpuesta, denotada con A^t está dada por

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}, \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m$$

En donde el elemento a_{ji} de la matriz original A se convertirá en el elemento a_{ij} de la matriz transpuesta A^t.
■

Teorema 2.8 (Producto punto con matrices transpuestas)**.**
Si el producto de las matrices A y B está definido, entonces se tiene $(AB)^t = B^t A^t$.

2.2. Tipo de matrices

Definición 2.9 (Diagonal principal)**.**
la diagonal principal de una matriz cuadrada A de $M_{mm}(K)$ contiene los elementos situados desde a_{11} hasta a_{nn}. Es decir, los elementos que van desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha: $a_{11}\,, a_{22}\,, a_{33}\,...a_{nn}$.
■

Definición 2.10 (Traza de una matriz)**.**
La traza de una matriz cuadrada A de $M_{mm}(K)$ está definida como la suma de los elementos de la diagonal principal de A. Es decir,

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

■

Definición 2.11 (Matriz simétrica)**.**
Diremos que una matriz A de $M_{mm}(K)$ es simétrica, si es una matriz cuadrada y $a_{ij} = a_{ji}$ con $i, j = 1, 2, 3, 4, ..., n$. ■

Definición 2.12 (Matriz antisimétrica)**.**
Diremos que una matriz A de $M_{mm}(K)$ es simétrica, si es una matriz cuadrada y $a_{ij} = -a_{ji}$ con $i, j = 1, 2, 3, 4, ..., n$. ■

Teorema 2.13 (Descomposición en parte simétrica y antisimétrica)**.**
Dada una matriz cuadrada A de $M_{mm}(K)$ siempre se podra descomponer en suma de parte simétrica y antisimétrica de la siguiente forma:

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

donde la parte simétrica es:

$$\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$$

Ejemplo 2.4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & \frac{-1}{2} \\ 3 & \frac{-1}{2} & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Notar que para que $a_{ii} = -a_{ii}$ en una matriz antisimétrica esta tiene que tener nulos todos los elementos de su diagonal principal.

Definición 2.14 (Matriz identidad)**.**
La matriz identidad es una matriz que cumple la propiedad de ser el elemento neutro del producto de matrices. Como el producto de matrices sólo tiene sentido si sus dimensiones son compatibles (si $A \in M_{mm}(K)$), existen infinitas matrices identidad. En general la matriz identidad de tamaño n, se define como la matriz diagonal que tiene valor 1 en cada una de las entradas de la diagonal principal, y 0 en el resto. Así:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix},\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \cdots,\ I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

■

Definición 2.15 (Matriz triangular)**.**
Una matriz triangular es un tipo especial de matriz cuadrada cuyos elementos por encima o por debajo de su diagonal principal son cero. Una matriz cuadrada de orden n se dice que es triangular superior si es de la forma:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & . & . & . & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & . & . & . & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & . & . & . & u_{3n} \\ . & . & .. & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Análogamente, una matriz de la forma:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & . & . & . & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & . & . & . & l_{nn} \end{pmatrix}$$

se dice que es una matriz triangular inferior. ■

Ejemplo 2.5 (Matriz triangular)**.**
Matriz triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriztriangular inferior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

2.3. Matrices invertibles

Nos interesa caracterizar las matrices A tales que los sistemas que se plantean con ellas tienen solución y ésta es única, es decir que todos los sistemas que se plantean como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ son compatibles determinados. Estas matrices A son aquellas para las que existe otra matriz B tal que $AB = I = BA$.

Si existe B tal que $BA = I$, dado un sistema de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, multiplicándolo a la izquierda por B, obtenemos que la solución, de existir, ha de ser $\mathbf{x} = B\mathbf{b}$.

Definición 2.16 (Matriz invertible)**.**
Diremos que una matriz cuadrada A de $M_{mm}(K)$ es invertible, no singular, no degenerada o regular si existe otra matriz cuadrada de orden n, llamada matriz inversa de A y representada como A^{-1}, tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n y el producto utilizado es el producto de matrices usual. Una matriz no invertible se dice que es singular o degenerada. ■

Ejemplo 2.6.
Por ejemplo la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

porque

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.17 (Propiedades de la matriz inversa)**.**

1. *La inversa de una matriz, si existe, es única.*
2. *La inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas cambiando el orden:*
$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$
3. *Si la matriz es invertible, también lo es su transpuesta, y el inverso de su transpuesta es la transpuesta de su inversa, es decir:*
$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$
4. *Y, evidentemente:*
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

Teorema 2.18 (Rango de las matrices invertibles)**.**
Una matriz regular A de $M_{mm}(K)$ tiene inversa si y solo si su rango es m.

Teorema 2.19 (Método de Gauss para el cálculo de la matriz inversa)**.**
La inversa de una matriz A de $M_{mm}(K)$ se puede calcular transformando la matriz aumentada $(A \mid I)$ mediante operaciones elementales con las filas de la matriz a $\left(I \mid A^{-1}\right)$.

Ejemplo 2.7 (Método de Gauss para el cálculo de la matriz inversa)**.**
Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3]{\substack{f_1 \\ f_1 - 2f_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 + f_3]{\substack{f_1 \\ f_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3]{\substack{f_1 \\ 3f_2 - 2f_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3]{\substack{3f_1 + f_2 \\ f_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1/3f_3]{\substack{1/6f_1 \\ -1/3f_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{array}\right)$$

2.4. Determinantes

Los determinantes son números asociados a las matrices. Vamos a empezar motivando su definición por su significado geométrico. Escribiendo en filas las coordenadas de un vector de la recta, de dos vectores del plano o de tres vectores del espacio tenemos, respectivamente, una matriz 1×1, una matriz 2×2 o una matriz 3×3.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Al mismo tiempo, dado un vector, podemos considerar su longitud, que es un número; dados dos vectores, podemos construir un paralelogramo cuyos lados son los vectores dados y considerar su área; Dados tres vectores, podemos construir un paralelepıpedo cuyas aristas son los tres vectores y considerar su volumen.

Definición 2.20 (Determinante de una matriz 1×1)**.**
Dada una matriz A de $M_{11}(K)$, el valor del determinante es igual al único termino de la matriz:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

■

Ejemplo 2.8 (Determinante)**.**

$$\det \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \end{vmatrix} = -3$$

Definición 2.21 (Menor de una matriz cuadrada)**.**
El menor (i, j) (a menudo denotado como M_{ij}) de una matriz cuadrada A de $M_{mm}(K)$ es definido como el determinante de la matriz formada mediante la eliminación de A de su iésima fila y su jésima columna. Un menor (i, j) puede ser referido también como (i, j)ésimo menor, o simplemente menor i, j.
■

Definición 2.22 (Adjunto o Cofactor de un elemento)**.**
Se llama cofactor del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A de $M_{mm}(K)$ y se representa C_{ij} al determinante que resulta al atribuir el signo: $(+)$ al menor complementario M_{ij} si $i + j$ es par o el signo: $(-)$ si $i + j$ es impar.

$$C_{ij} = (-1)^{(i+j)}\ M_{ij}$$

■

Ejemplo 2.9. Dada la matriz cuadrada de orden 5:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{pmatrix}$$

el cofactor del elemento $a_{2,3}$, será $C_{2,3}$:

$$C_{2,3} = -\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix}$$

y el cofactor del elemento $a_{2,2}$, será $C_{2,2}$:

$$C_{2,2} = +\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix}$$

Teorema 2.23 (Teorema de Laplace para el cálculo de determinantes)**.**
Dada una matriz cuadrada A de $M_{mm}(K)$ el teorema de Laplace señala que el valor de su determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila i por sus cofactores.

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{(i+k)} \cdot a_{i,k} \cdot \det(M_{i,k})$$

o de los elementos de una columna j pos sus cofactores. ∎

Usando este teorema podemos calcular los determinantes de una matriz 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se calculan con la siguiente fórmula:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

y de una matriz 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se calcula mediante la regla de Sarrus:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Ejemplo 2.10 (Cálculo del área de un paralelogramo)**.** El área del paralelogramo formado por los vectores $\mathbf{v} = (1, 3)$ y $\mathbf{u} = (2, 2)$ es igual al valor absoluto del determinante:

$$|\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}| = |1 * 2 - 2 * 3| = |-4| = 4$$

Ejemplo 2.11 (Volumen de un paralepípedo)**.** El volumen del paralepípedo formado por los vectores $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{u} = (1, -2, 1)$ y $\mathbf{w} = (2, 1, 1)$ es igual al valor absoluto del determinante:

$$|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}| = |((1*-2*1)+(2*1*2)+(1*1*1))-((2*-2*1)+(1*2*1)+(1*1*1))|$$

$$= |(-2 + 4 + 1) - (-4 + 2 + 1)| = |3 - (-1)| = |4| = 4$$

Teorema 2.24 (Propiedades de los determinantes)**.**

1. *El determinante de una matriz y el de su traspuesta coinciden:* $\det(A^t) = \det(A)$
2. *El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes:* $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$
3. *Si los elementos de una línea o columna de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho numero.*
4. *Si intercambiamos dos filas en una matriz su determinante cambia de signo.*
5. *Si descomponemos una fila de una matriz en suma de otras dos filas el determinante de la matriz dada es la suma de los determinantes de las dos matrices obtenidas sustituyendo en la matriz dada la fila considerada por cada una de las filas sumandos.*
6. *El determinante de una matriz con filas proporcionales es cero.*

■

Definición 2.25 (Matriz de cofactores o matriz de adjuntos)**.**
Dada una matriz cuadrada A de $M_{mm}(K)$ se llama matriz de cofactores o matriz de adjuntos a la matriz C que tiene en cada elemento i, j el valor de C_{ij}.
■

Ejemplo 2.12 (Matriz de cofactores)**.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

su matriz de cofactores es:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

donde:

$$C_{11} = + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \quad C_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad C_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad C_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad C_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad C_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad C_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Definición 2.26 (Matriz adjunta)**.**
Dada una matriz cuadrada A de $M_{mm}(K)$ se llama matriz adjunta a la matriz de cofactores traspuesta:

$$\operatorname{adj}(A) = C^T$$

■

Observación: Es frecuente confundir la matriz adjunta con la matriz de adjuntos por ese motivo es preferible usar el termino de matriz de cofactores.

Teorema 2.27 (Calcular la matriz inversa utilizando la matriz adjunta)**.**
La inversa satisface la igualdad:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A)$$

donde $|A|$ *es el determinante de* A *y* $\operatorname{adj}(A)$ *es la matriz adjunta de* A*.*

Demostración:
Suponiendo que el determinante de A es distinto de cero, sea a_{ij} es el elemento ij de la matriz A y sea M_{ij} la matriz A sin la fila i y la columna j (comúnmente conocida como j-ésimo menor de A). Entonces

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$$

Sea $k \neq j$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} \det(M_{ij}) = 0$$

Esta afirmación es válida propiedades de los determinantes, pues la parte izquierda de la relación nos conduce a una matriz con la columna j igual a la columna k y los demás términos iguales a los de A. Entonces

$$\delta_{jk} \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(M_{ij})\, a_{ik}$$

donde $\delta_{jk} = 1$ cuando $j = k$ y $\delta_{jk} = 0$ cuando $j \neq k$. Entonces

$$\det(A)\, I = (\operatorname{adj}(A))\, A$$

Es decir que A tiene inversa izquierda

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A)$$

Para calcular por la derecha se hace analogamente.
■

Teorema 2.28 (Regla de Cramer)**.**
Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema de ecuaciones. A es la matriz de coeficientes del sistema, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ son las incógnitas y $\mathbf{b}$ son los términos independientes. Entonces la solución al sistema se presenta así:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

donde A_j es la matriz resultante de reemplazar la j-ésima columna de A por $\mathbf{b}$.

Demostración:
La demostración es sencilla conociendo el teorema anterior:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A)\mathbf{b}$$

Pero para una fila i cualquiera $\mathrm{adj}(A)\mathbf{b} = \det(A_j)$. ■

Capítulo 3

Espacios vectoriales

El concepto de espacio vectorial es sin duda uno de los más importantes de esta asignatura y del álgebra lineal. El espacio vectorial es una estructura algebraica que generaliza, hasta el mayor nivel de abstracción, o la idea de los vectores geométricos del plano y el espacio euclídeos ordinarios, así como las magnitudes vectoriales que aparecen en Física; esencialmente, son conjuntos cuyos elementos se pueden sumar entre sí y multiplicar por números.

3.1. Definiciones previas

Definición 3.1 (Definición de grupo)**.**
Un grupo es un conjunto no vacio, G, con una operación sobre el que combina dos elementos cualesquiera a y b de G para formar otro elemento denotado como $a * b$. Se representa como $(G, *)$ y debe cumplir las siguientes propiedades:

1. Clausura: Para todo $a, b \in G$, el resultado de la operación $a * b$ también pertenece a G.

2. Propiedad asociativa: Para todos $a, b, c \in G$, se cumple la ecuación $(a * b) * c = a * (b * c)$.

3. Elemento identidad: Existe un elemento $e \in G$, tal que para todos los elementos $a \in G$, se cumpla la ecuación $e * a = a * e = a$.

4. Elemento simétrico: Para todo $a \in G$, existe un elemento $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$.

■

Definición 3.2 (Definición de grupo abeliano)**.**
El grupo $(G, *)$ es un grupo abeliano si satisface la propiedad conmutativa

1. Para todo $a, b \in G$ se tiene que $a * b = b * a$

■

Si la operación $*$ definida en G es la adición $+$, al elemento neutro se le suele llamar cero, y al elemento simétrico de uno a se le llama elemento opuesto y se le denota por $-a$.

Si la operación $*$ es la multiplicación $\cdot$, al elemento neutro se le suele denominar elemento unidad, 1, y al simétrico , elemento inverso y se le designa por a^{-1}.

Definición 3.3 (Definición de subgrupo)**.**
Un subconjunto no vacío S de un grupo G es un subgrupo (de G) si, con respecto a la misma operación de G, S también es grupo.
■

Ejemplo 3.1 (Grupos)**.**

1. $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano.

2. $(\mathbb{Z}, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

Una estructura más "fuerte"que la de grupo, con la que estamos familiarizados, es la que posee el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros respecto de la suma y el producto. Siviendonos ésta como ejemplo casi general.

Definición 3.4 (Definición de anillo)**.**
Sean A un conjunto dotado de dos operaciones, que denotaremos $+$ y $\cdot$, respectivamente. Diremos que $(A, +, \cdot)$ es un anillo si se cumplen los siguientes axiomas:

1. Clausura: Para todo $a, b \in A$, el resultado de la operación $a + b$ también pertenece a A.

2. Propiedad asociativa: Para todos $a, b, c \in A$, se cumple la ecuación $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3. Elemento neutro: Existe un elemento neutro $0 \in A$, tal que para todos los elementos $a \in A$, se cumpla la ecuación $0 + a = a + 0 = a$.

4. Elemento simétrico (opuesto): Para todo $a \in A$, existe un elemento $-a \in G$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

5. Propiedad conmutativa $a, b \in A$ se tiene que $a + b = b + a$

Es decir A es grupo abeliano respecto a $+$.

6. Clausura: Para todo $a, b \in A$, el resultado de la operación $a \cdot b$ también pertenece a A.

7. Propiedad asociativa: Para todos $a, b, c \in A$, se cumple la ecuación $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

8. Propiedad distributiva de $\cdot$ respecto de $+$: Para todo $a, b, c \in A$ se tiene que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y que $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

■

Definición 3.5 (Anillo conmutatiivo)**.**
Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, si $\cdot$ es conmutativo, esto es $a, b \in A$ se tiene que $a \cdot b = b \cdot a$, se de dice que el anillo es conmutativo.
■

Definición 3.6 (Anillo unitario)**.**
Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, si existe elemento neutro para $\cdot$ de dice que el anillo es unitario.
■

Definición 3.7 (Elemento inverso)**.**
Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo unitario, diremos que $a \in A$ es un elemento inversible de A si posee elemento inverso respecto de $\cdot$, es decir, si existe $a^{-1} \in A$ tal que $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$.
■

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ representa un modelo de estructura algebraíca con dos operaciones internas muy conocido.

Definición 3.8 (Cuerpo)**.**
Llamaremos cuerpo, K, a todo anillo $(K, +, \cdot)$ unitario, conmutativo y tal que todo elemento distinto al cero (elemento neutro respecto a $+$) posea inverso.

1. $(K, +)$ es un grupo abeliano.
2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.
3. Propiedad distributiva de $\cdot$ respecto de $+$.

■

Ejemplo 3.2 (Cuerpos)**.**

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ con $+$ la suma y $\cdot$ el producto escalar es un cuerpo.
2. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ econ $+$ la suma y $\cdot$ el producto escalar es un cuerpo.

Definición 3.9 (Operación externa)**.**
Consideremos un conjunto X, y otro conjunto K que llamaremos conjunto de escalares. Llamaremos operación binaria externa sobre X, a una función que tome un elemento de K y un elemento de X, y de como resultado un elemento de X. Es decir, una función:

$$p : K \times X \longrightarrow X.$$

■

Normalmente, a una operación externa de este tipo la denotaremos y la llamaremos multiplicación por escalar; y al resultado de aplicarla a un escalar $\lambda \in K$ y a un elemento $x \in X$, lo denotaremos $\lambda \cdot x$, o simplemente λx, y lo llamaremos producto de λ por x.

3.2. Espacios vectoriales

Definición 3.10 (Espacio vectorial).
Un conjunto V es un Espacio Vectorial sobre un cuerpo K si se cumplen las siguientes propiedades:

1. Esta dotado de una operación interna +, llamada suma, respecto a la cual $(V,+)$ es un grupo abeliano.

2. Tiene una operación externa $\cdot$,llamada multiplicación de $\cdot : K \times V \longrightarrow V$. con las siguientes propiedades:

   a) Distributiva respecto a la suma de V: $\lambda(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = \lambda\mathbf{v_1} + \lambda\mathbf{v_2}$.

   b) Distributiva respecto a la suma en K: $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v} + \lambda_2\mathbf{v}$.

   c) Asociatividad mixta: $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{v} = \lambda_1(\lambda_2\mathbf{v})$

   d) Elemento neutro del cuerpo respecto a la multiplicación: $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

■

A los elementos de un espacio vectorial los llamaremos vectores, y los escribiremos en negrita. En un espacio vectorial hay, por tanto, cuatro operaciones:

1. La suma de vectores: $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$

2. La suma de escalares: $\lambda_1 + \lambda_2$

3. Producto de escalares: $\lambda_1 \cdot \lambda_2$

4. Producto de vectores por escalares: $\lambda \cdot \mathbf{v}$

Definición 3.11 (Espacio vectorial K^n).
El espacio vectorial más conocido notado como K^n, donde $n > 0$ es un entero, tiene como elementos n-tuplas, es decir, sucesiones finitas de K de longitud n con las operaciones:

1. $(u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1, v_2, ..., v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)$.

2. $\lambda(u_1, u_2, ..., u_n) = (\lambda u_1, \lambda u_2, ..., \lambda u_n)$

■

Definición 3.12 (Definición algebraica de un vector).
De forma que un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ será una n-tupla $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ donde $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}$.
■

3.3. Espacio euclideo

Un espacio euclídeo es un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ en el que se define un producto entre vectores tal que a cada par de vectores se le asocia un número real. El producto se llama producto escalar.

Definición 3.13 (Producto escalar)**.**
Se define como producto escalar de dos vectores $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^n$ a la operación:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 +, ..., +v_n u_n$$

■

Ejemplo 3.3 (Producto escalar entre vectores)**.**
Sea $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ y $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ entonces:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 1 * 2 + (-1) * (-1) + 2 * 3 = 2 + 1 + 6 = 9$$

Sin embargo el uso de vectores es de gran importancia en la geometría y en el uso de magnitudes tales como el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, el campo eléctrico, etc.

Definición 3.14 (Definición geométrica de un vector)**.**
Un vector también se puede ver desde el punto de vista de la geometría como vector geométrico (usando frecuentemente el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ ó bidimensional $\mathbb{R}^2$). Siendo un vector un segmento de recta que tiene tres características:

1. módulo: la longitud del segmento
2. dirección: la orientación de la recta
3. sentido: indica cual es el origen y cual es el extremo final de la recta

■

El primero de los puntos que lo determinan se llama origen y el segundo extremo del vector. Por tanto, como hemos dicho un vector queda caracterizado por los siguientes elementos: su longitud o módulo, siempre positivo por definición:

Definición 3.15 (Módulo de un vector)**.**
En un espacio vectorial euclídeo podemos definir la longitud o el módulo de un vector como:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

Escribimos este módulo por $|\mathbf{v}|$ cuando no hay lugar a confusión.
■

Ejemplo 3.4 (Módulo de un vector)**.**
Sea $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ entonces:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1 * 1 + (-1) * -(1) + 2 * 2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

Definición 3.16 (vector unitario).
Un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ se dice unitario si $|\mathbf{u}| = 1$
■

La dirección, la cual podemos representar como la orientación de la recta viene definida mediante un vector unitario.

Definición 3.17 (Dirección de un vector).
La dirección de un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$
■

Ejemplo 3.5 (Dirección de un vector).
Sea $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ entonces su dirección es:

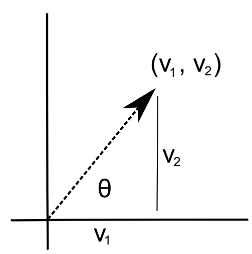
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$$

Ejemplo 3.6 (Dirección de un vector).
Sea $\mathbf{v} = (1, 1)$ entonces su dirección es:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

En $\mathbb{R}^2$ la dirección de un vector $\mathbf{v}$ puede obtenerse como $\mathbf{u} = (cos\theta, sen\theta)$ donde θ se le suele llamar tambien dirección de $\mathbf{v}$.

Veamos cual sería su interpretación geométrica:



Si analizamos el vector unitario, este sería $\mathbf{u} = (\frac{v_1}{|\mathbf{v}|}, \frac{v_2}{|\mathbf{v}|})$ o dicho de otra forma $cos\theta = \dfrac{v_1}{|\mathbf{v}|}$ y por tanto θ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $(1, 0)$, se toma el valor de $\theta \in [0, \pi]$.

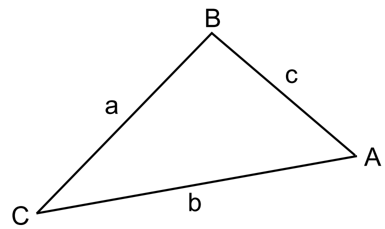
Definición 3.18 (Ángulo entre dos vectores).
Sean $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ dos vectores entonces se define ángulo entre ellos como el ángulo no negativo más pequeño (esto es, entre $[0, \pi]$) definido sobre el plano que contiene a los vectores $\mathbf{v}, \mathbf{u}$.
■

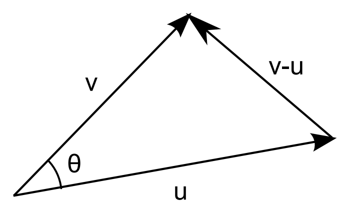
Teorema 3.19. *Sean $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ dos vectores diferentes de cero. Si θ es el ángulo entre ellos, entonces:*

$$cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{v}||\mathbf{u}|}$$

Demostración: Lo demostraremos para $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. La ley de los cosenos establece que en un triángulo se tiene que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$$





entonces aplicando la ley de los cosenos tenemos:

$$|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{v}||\mathbf{u}|cos\theta$$

donde

$$|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 = (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{u}|^2$$

igualando terminos y simplificando:

$$-2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2|\mathbf{v}||\mathbf{u}|cos\theta$$

$$cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}||\mathbf{u}|}$$

■

3.4. Bases de espacios euclideos

Definición 3.20 (Combinación lineal)**.**
Sea V un espacio vectorial sobre K. Dados r vectores $\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_r} \in V$, llamamos combinación lineal de estos vectores a cualquier expresión de la forma:

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + ... + c_r\mathbf{v_r} \in V$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in K$
■

Definición 3.21 (Dependencia e independencia lineal)**.**
Sea V un espacio vectorial sobre K. Diremos que un sistema (o conjunto) de vectores $S = \{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_r}\} \subset V$ es linealmente dependiente, si existen r escalares $c_1, c_2, ..., c_n \in K$, no todos nulos, tales que $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + ... + c_r\mathbf{v_r} = 0$.

En caso contrario, es decir, si la unica forma de escribir el vector 0 como combinación lineal de estos vectores es tomando $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, diremos que el sistema S es linealmente independiente o libre.
■

Si el espacio vectorial es $\mathbb{R}^n$ podemos usar los cálculos matriciales de los temas anteriores para saber si un sistema de vectores $S = \{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_r}\} \subset \mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente. Para ello tomamos la matriz

$$M = (\mathbf{v_1}|...|\mathbf{v_r})$$

cuyas columnas son los vectores de S. Sea E una matriz escalonanda de M. Si alguna columna de E no tiene pivote, sabemos que la columna correspondiente en M es también combinación lineal de las anteriores, luego S es linealmente dependiente.

Si todas las columnas de E tienen pivote entonces S es linealmente independiente.

Ejemplo 3.7 (Dependencia lineal)**.**
Sea en $\mathbb{R}^3$ el conjunto $S = \{\mathbf{v_1}) = (1,1,2), \mathbf{v_2}) = (-1,0,1), \mathbf{v_3}) = (2,-1,2)\}$ es linealmente independiente ya que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_1 \\ f_1 - f_2 \\ f_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_1 \\ f_2 \\ 2f_1 - f_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{f_1 \\ f_2 \\ 3f_2 - f_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Sea en $\mathbb{R}^3$ el conjunto $S = \{\mathbf{v_1}) = (1,1,2), \mathbf{v_2}) = (-1,0,1), \mathbf{v_3}) = (2,1,1)\}$ es linealmente dependiente ya que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_1 \\ f_1 - f_2 \\ f_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_1 \\ f_2 \\ 2f_1 - f_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{f_1 \\ f_2 \\ 3f_2 - f_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 3.22 (Base ordenada)**.**
Si V es un K^n espacio vectorial de dimensión finita ($n \in \mathbb{N}$). Una base ordenada de V es una sucesión finita de vectores linealmente independiente tal que para todo $\mathbf{v} \in V$ se puede expresar como combinación lineal de estos vectores.
■

Definición 3.23 (Vectores ortogonales)**.**
Dos vectores $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ diferentes a 0 son ortogonales si el ángulo entre ellos es $\pi/2$ o dicho de otra forma si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$.
■

Definición 3.24 (Base ortogonal y ortonormal).
Sea $S = \{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}\} \subset \mathbb{K}^n$ una base de V un espacio vectorial sobre K^n. Si cada par de vectores de S son ortogonales entre si, se dice que forman una base ortogonal. Si ademas tienen módulo 1 se dice que forman una base ortonormal.
■

Ejemplo 3.8.
El conjunto $B = \{\mathbf{e_1} = (1,0,0), \mathbf{e_2} = (0,1,0), \mathbf{e_3} = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ es una base ortonormal del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

Definición 3.25 (Coordenadas de un vector).
Sea V un K^n espacio vectorial. Dada una base $B = (\mathbf{e_1}, ..., \mathbf{e_n})$, para todo vector $\mathbf{v} \in V$, existe una única combinación lineal

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{e_1} + c_2\mathbf{e_2} + ... + c_n\mathbf{e_n}$$

Los escalares $c_1, c_2, ..., c_n$ definen, por tanto, al vector $\mathbf{v}$, y los llamaremos coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto a B.
■

Ejemplo 3.9. Dado el vector $\mathbf{v} = (1, -2, 1)$ sus coordenadas respecto a la base ortonormal $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ será:

$$(1, -2, 1) = 1(1,0,0) + (-2)(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

Y se representa como $1\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2} + 1\mathbf{e_3}$. En otros campos como la física es frecuente llamar a los vectores de esta base llamada cartesiana como: $1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$.

Definición 3.26 (Ortogonalidad entre subespacios).
Si U y V son dos subespacios de K^n se dice que U es ortogonal a V si y sólo si para todo $\mathbf{u} \in U$ y para todo $\mathbf{v} \in V$ se tiene que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ y se denota como $U \perp V$.
■

Definición 3.27 (Complemento Ortogonal).
Dado un subespacio U de K^n al subespacio V que contiene a todos los subespacios de K^n que son ortogonales a U se llama complemento ortogonal y se denota como $U^{\perp}$.
■

Si nos fijamos en la defición del complemento ortogonal es facil comprobar que $K^n = U \cup U^{\perp}$ y que $U \cap U^{\perp} = \oslash$

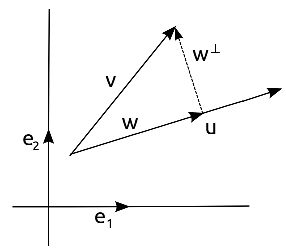
Teorema 3.28 (Unicidad de descomposición como suma de espacios ortogonales).
Sea $K^n = U \cup U^{\perp}$ y tomemos $\mathbf{v} \in K^n$ un vector cualquiera. Entonces existe ***una única*** *descomposición de $\mathbf{v}$ como suma de un vector $\mathbf{u} \in U$ y otro vector $\mathbf{u}^{\perp} \in U^{\perp}$*

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^{\perp}$$

Definición 3.29 (Proyección)**.**
La unicidad de la descomposición de un vector $\mathbf{v} \in K^n$ como $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^{\perp}$ con $K^n = U \cup U^{\perp}$ permite definir proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre el subespacio U como el vector $\mathbf{u} \in U$.
■

El uso más normal de esta definición se emplea para hablar de la proyección de un vector $\mathbf{v} \in K^n$ sobre otro vector $\mathbf{u} \in K^n$. En este caso el subespacio U sobre el que se hace la proyección esta formado por una base ortonormal $B = \{\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\}$ que consta de un único vector.

Veamos una representación gráfica en $K^n = \mathbb{R}^2$.



En este caso la proyección de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$ es el único verctor $\mathbf{w} \in U = \{\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\}$ tal que satisface que $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^{\perp}$.

Teorema 3.30 (Proyección ortogonal sobre un vector)**.**
Sean $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{u}$ *dos vectores de* K^n *no nulos. Entonces la proyección de* $\mathbf{v}$ *sobre el subespacio generado por* $\mathbf{u}$ *viene definido como:*

$$proy_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$$

Notar que de esta forma es fácil ver que $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ seria la componente de la proyección sobre la base ortonormal $B = \{\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\}$.

Ejemplo 3.10.
La proyección de $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$ sobre $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ es:

$$proy_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \frac{(1, 2, -2) \cdot (1, 0, 1)}{|(1, 0, 1)|} \frac{(1, 0, 1)}{|(1, 0, 1)|} = \frac{1 + 0 - 2}{\sqrt{2}} \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Los subespacios U de K^n que tienen como base un único vector son rectas. Existen diversas formas de escribir la ecuación de una recta, por ejemplo si tenemos un punto $P = (p_1, ..., p_n)$ un vector $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$ si queremos conocer que puntos $X = (x_1, ..., x_n)$ pertenecen a la recta que pasa por P y tiene por dirección la misma que el vector $\mathbf{u}$.

1. Ecuación vectorial de la recta:

$$X = P + \lambda\mathbf{u}$$

2. Ecuación paramétrica

$$\begin{array}{ccc} x_1 & = & p_1 & +\lambda u_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n & = & p_n & +\lambda u_n \end{array}$$

3. Ecuaciones simétricas de la recta: Si despejamos λ en cada igualdad

$$\frac{x_1 - p_1}{u_1} = ... = \frac{x_1 - p_1}{u_1}$$

donde λ es una constante arbitraria.

Ejemplo 3.11 (Ecuaciones de la recta)**.**
Calculemos las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P = (1, 2)$ y tiene como dirección la del vector $\mathbf{u} = (1, -1)$:

$$\begin{array}{ccc} x & = & 1 & +\lambda \\ y & = & 2 & -\lambda \end{array}$$

Si se suman podemos obtener la ecuación implicita de la recta $x + y = 3$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1}$$

Teorema 3.31 (Proyección ortogonal sobre un subespacio)**.**
Sean $\mathbf{v}$ *un vectore de* K^n *no nulo y* U *un subespacio de* K^n *no vacio con una base ortogonal* $B = \{\mathbf{u_1}, ..., \mathbf{u_r}\}$ *. Entonces la proyección de* $\mathbf{v}$ *sobre el subespacio* U *viene definido como:*

$$proy_U \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u_i}}{|\mathbf{u_i}|} \frac{\mathbf{u_i}}{|\mathbf{u_i}|}$$

Teorema 3.32 (Teorema de la aproximación optima)**.**
Sea U *un subespacio de* K^n*, y* $\mathbf{v} \in K^n$ *un vector entonces:*

$$|\mathbf{v} - proy_U \mathbf{v}| \leq |\mathbf{v} - \mathbf{w}|$$

con $\mathbf{w}$ *cualquier vector de* U*.*

Ejemplo 3.12 (Distancia de un punto a una recta)**.**
Si queremos calcular la distancia del punto $P = (1, 1)$ a la recta $x + y = 3$ debemos seguir los siguientes pasos:

1. Calcular dos punto de la recta: Por ejemplo $O = (1, 2)$ y $Q = (2, 1)$
2. Calculamos los vectores que tienen como origen O y como extremos P y Q: $\mathbf{op} = (0, -1)$ y $\mathbf{oq} = (1, -1)$.
3. Calculamos $proy_{\mathbf{oq}}\mathbf{op} = \dfrac{(0,-1) \cdot (1,-1)}{|(1,-1)|} \dfrac{(1,-1)}{|(1,-1)|} = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2})$

4. Calculamo $|\mathbf{op} - proy_{\mathbf{oq}}\mathbf{op}| = |(0,-1) - (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})| = |(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

De la misma forma que hemos definido las ecuaciones de una recta es un K^n espacio se puede hacer con el plano solo que ahora tendremos que son los subespacios U de K^n que tienen como base dos vectores no paralelos. Existen diversas formas de escribir la ecuación de una plano, por ejemplo si tenemos un punto $P = (p_1, ..., p_n)$ un vector $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$ y otro vector $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$ si queremos conocer que puntos $X = (x_1, ..., x_n)$ pertenecen al plano.

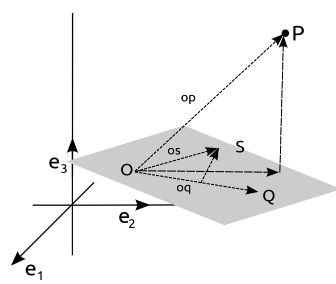
1. Ecuación vectorial del plano:

$$X = P + \lambda\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$$

2. Ecuación paramétrica

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & = & p_1 & +\lambda u_1 & +\beta v_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & p_n & +\lambda u_n & +\beta v_n \end{array}$$

donde λ y β son constantes arbitrarias.



Ejemplo 3.13. Distancia de un punto a un plano
Calcular la distancia del punto $P = (1,1,1)$ al plano $3x - 2y + 4z = 1$.

1. Como primer paso necesitamos calcular tres puntos del plano para ello es suficiente con tomar valores que satisfagan la euación. Por ejemplo $O = (1,1,0)$, $S = (1,-1,-1)$ y $Q = (-1,0,1)$.

2. Calculamos dos vectores de origen el punto O y de extremo los puntos S y Q: $\mathbf{os} = (0,-2,-1)$ y $\mathbf{oq} = (-2,-1,1)$.

3. Creamos una base ortogonal U que contenga únicamente todos los vectores del plano. Para ello tomamos uno de los vectores anteriores, $\mathbf{os} = (0,-2,-1)$. Calculamos la $proy_{\mathbf{os}}\mathbf{oq} = \frac{(0,-2,-1)\cdot(-2,-1,1)}{|(0,-2,-1)|}\frac{(0,-2,-1)}{|(0,-2,-1)|} = (0, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5})$ y se lo restamos a $\mathbf{oq}$ obteniendo un vector ortogonal a $\mathbf{os}$ y contenido en el plano: $\mathbf{os}^{\perp} = (-2,-1,1) - (0, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}) = (-2, \frac{-3}{5}, \frac{6}{5})$

4. Una vez que tenemos la base ortogonal calculamos la proyección del vector **op** sobre U.

$$proy_U\mathbf{op} = \frac{(0,0,1)\cdot(0,-2,-1)}{|(0,-2,-1)|}\frac{(0,-2,-1)}{|(0,-2,-1)|} + \frac{(0,0,1)\cdot(-2,\frac{-3}{5},\frac{6}{5})}{|(-2,\frac{-3}{5},\frac{6}{5})|}\frac{(-2,\frac{-3}{5},\frac{6}{5})}{|(-2,\frac{-3}{5},\frac{6}{5})|} =$$

$$= (0,\frac{2}{5},\frac{1}{5}) + (\frac{-60}{145},\frac{-18}{145},\frac{36}{145}) = (\frac{-60}{145},\frac{40}{145},\frac{65}{145})$$

5. Utilizamos el teorema de la proyección optima y calculamos $|\mathbf{op} - proy_U\mathbf{op}| = |(\frac{60}{145},\frac{-40}{145},\frac{80}{145})| = \sqrt{\frac{16}{29}} = 0{,}7427$

Otra forma de escribir la ecuación de un plano es con un vector ortogonal a los vectores cntenidos en el plano que conforman una base ortogonal de U. Sea $\mathbf{n} = (n_1, ...n_n)$ este vector normal al plano y $P = (p_1, ..., p_n)$ un punto del plano.

Se llama ecuación normal del plano a: $n_1(x_1 - p_1) + ... + n_n(x_n - p_n) = 0$

Ejemplo 3.14 (Ecuacion normal del plano)**.**
Calcular la ecuación normal del plano que contiene a los puntos $P = (1,0,0), Q = (1,1,-1), S = (0,0,1)$ Calculamos una base ortogonal del subespacio generado por **pq** y **ps**: $\mathbf{pq} = (0,1,-1),\ \mathbf{ps} = (-1,0,1)$.

$proy_{\mathbf{ps}}\mathbf{pq} = \frac{(0,1,-1)\cdot(-1,0,1)}{|(-1,0,1)|}\frac{(-1,0,1)}{|(-1,0,1)|} = (\frac{1}{2},0,\frac{-1}{2})$

Nuestra base ortogonal esta formada por $\mathbf{ps} = (-1,0,1)$ y $(\mathbf{pq} - proy_{\mathbf{ps}}\mathbf{pq}) = (\frac{-1}{2},1,\frac{-1}{2})$

Tomamos un punto que no este en el plano:

$$\begin{array}{rclccc} x & = & 1 & -\lambda & -\frac{1}{2}\beta \\ y & = & 0 & & +\beta \\ z & = & 0 & +\lambda & -\frac{1}{2}\beta \end{array}$$

Por ejemplo $M = (1,0,1)$ y calculamos el vector $(\mathbf{pm} - proy_U\mathbf{pm})$:

$$proy_U\mathbf{pm} = \frac{(0,0,1)\cdot(-1,0,1)}{|(-1,0,1)|}\frac{(-1,0,1)}{|(-1,0,1)|} + \frac{(0,0,1)\cdot(\frac{-1}{2},1,\frac{-1}{2})}{|(\frac{-1}{2},1,\frac{-1}{2})|}\frac{(\frac{-1}{2},1,\frac{-1}{2})}{|(\frac{-1}{2},1,\frac{-1}{2})|} =$$

$(\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}) + (\frac{1}{6},\frac{-1}{3},\frac{1}{6}) = (\frac{-1}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3})$ y por tanto $(\mathbf{pm} - proy_U\mathbf{pm}) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

La ecuación normal de la recta será:

$$\frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{3}(y-0) + \frac{1}{3}(z-0) = 0$$

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} = 0$$

De todas formas en el siguiente tema veremos una forma más sencilla de calcular la ecuación normal del plano.

3.5. Producto cruz o vectorial

El producto cruz o producto vectorial es una operación entre dos vectores en un espacio tridimensional. El resultado es un vector perpendicular a los vectores que se multiplican, y por lo tanto esta operación es aplicada con frecuencia para resolver problemas matemáticos, físicos o de ingeniería.

Definición 3.33 (Producto vectorial)**.**
Sean dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. El producto vectorial da como resultado un nuevo vector, $\mathbf{w}$ ortogonal a estos. El producto vectorial entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ se denota mediante:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e_1} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e_2} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e_3}$$

■

Teorema 3.34 (Formula alternativa del producto vectorial)**.**
El producto vectorial puede definirse de una manera más compacta de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin\theta)\ \mathbf{n}$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$, y $\mathbf{n}$ es un vector ortogonal y unitario.

Ejemplo 3.15 (Producto vectorial)**.**
El producto vectorial de los vectores $\mathbf{u} = (2, 0, 1)$ y $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$ se calcula del siguiente modo:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{e_1} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{e_2} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{e_3} = \mathbf{e_1} - 5\mathbf{e_2} - 2\mathbf{e_3}$$

Teorema 3.35 (Propiedades del producto vectorial)**.**
Cualesquiera que sean los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$:

1. *Anticonmutatividad:* $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$
3. *Si* $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *con* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ *y* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *entonces* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *son paralelos.*

Capítulo 4

Transformaciones lineales

Debido a la extensión del temario y al tiempo para dictar el curso el tema de transformaciones lineales se vera de forma muy superficial.

4.1. Definiciones

Definición 4.1 (Transformación lineal)**.**
Se llama transformación lineal a toda aplicación $T : V \to W$ con $V \in K^n$ y $W \in K^m$ espacios vectoriales sobre el cuerpo K que cumplan:

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ con $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
2. $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$ donde k es un escalar del cuerpo K.

Las aplicaciones lineales se llaman también homomorfismos.
■

Las aplicaciones lineales nos permiten trasvasar los resultados encontrados en unos espacios vectoriales como el plano ($\mathbb{R}^2$) a otros más complicados como $\mathbb{C}^n$.

Ejemplo 4.1 (Transformación lineal)**.**
La aplicación

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \\ 2y \end{pmatrix} \end{array}$$

es una aplicación lineal.

Definición 4.2 (Endomorfismo)**.**
Una aplicación lineal $T : V \to V$ con $V \in K^n$ espacios vectoriale sobre el cuerpo K se llama endomorfismo.
■

4.2. Forma matricial de una aplicación lineal

Primero, fijaremos una base $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}\}$ de V y otra base $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_m}\}$ de W

Entonces si $\mathbf{x} \in V$ se podrá escribir por sus coordenadas como $x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} +, ..., x_n\mathbf{e_n}$. Analogamente para $\mathbf{y} \in W$ como $y_1\mathbf{u_1} + y_2\mathbf{u_2} +, ..., y_m\mathbf{u_m}$.

Definición 4.3 (Forma matricial de una aplicación lineal)**.**
Una aplicación lineal $T : V \to W$ tal que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ se puede expresar mediante un producto matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

A esta matriz se le llama matriz de transformación. ∎

Ejemplo 4.2 (Forma matricial)**.**
La aplicación

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \\ 2y \end{pmatrix} \end{array}$$

tiene como matriz de transformación:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Las rotaciones es el movimiento de cambio de orientación de un sistema de referencia a otro de de forma que una línea (llamada eje de rotación) permanece fijo.

Teorema 4.4 (Rotaciones en el plano)**.**
Una rotación en el plano es una aplicación lineal $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tiene como matriz de transformación:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Donde la rotación se da en un ángulo θ en sentido antihorario.

Teorema 4.5 (Rotaciones en el espacio respecto a $\mathbf{e_1}$)**.**
Una rotación en el espacio es una aplicación lineal $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Si se gira respecto al vector $\mathbf{e_1}$ tiene como matriz de transformación:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Teorema 4.6 (Proyecciones paralelas)**.**
Una proyección paralela $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sobre el plano que contiene a $\mathbf{e_1}$ y $\mathbf{e_2}$ es una aplicación lineal. Sea $\mathbf{d} = \{d_1, d_2, d_3\}$ la direccíon de proyección (no paralela al plano). Entonces la aplicación tiene como matriz de transformación:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{d_1}{d_3} & -\frac{d_2}{d_3} \end{bmatrix}$$

4.3. Valores y vectores propios

Sea $T : V \to W$ una aplicación lineal. En ocasiones es interesante conocer que vectores $\mathbf{v} \in V$ satisfacen que $T(\mathbf{v})$ y $\mathbf{v}$ son paralelos. Por tanto estamos hablando de un endomorfismo donde la dimensión de los espacios vectoriales no cambia.

Definición 4.7 (Valores y vectores propios)**.**
Dada una aplicación lineal $T : V \to V$ los vectores $\mathbf{v} \in V$ que satisfacen

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$$

se llaman vectores propios. Al escalar λ se le llama valor propio del vector $\mathbf{v}$.
■

Teorema 4.8 (Ecuación del valor propio)**.**
Sea $\mathbf{v}_\lambda \in V$ un vector propio de la aplicación $T : V \to V$ que tiene como matriz de transformación A tal que $T(\mathbf{v}_\lambda) = \lambda \mathbf{v}_\lambda$. Entonces λ es raiz del polinomio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. A $p(\lambda)$ se le llama polinomio característico.

Observemos que si $T(\mathbf{v}_\lambda) = \lambda \mathbf{v}_\lambda$ entonces $A\mathbf{v}_\lambda = \lambda \mathbf{v}_\lambda$ que implica que $A\mathbf{v}_\lambda - \lambda \mathbf{v}_\lambda = \mathbf{0}$ pero esta expresión puede reescribirse como $A\mathbf{v}_\lambda - \lambda I \mathbf{v}_\lambda = \mathbf{0}$ y por tanto $(A - \lambda I)\mathbf{v}_\lambda = \mathbf{0}$

Definición 4.9 (Ecuación caracteristica)**.**
Sea $\mathbf{v}_\lambda \in V$ un vector propio de la aplicación $T : V \to V$ que tiene como matriz de transformación A. La ecuación

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

se llama ecuación caracteristica.
■

Ejemplo 4.3.
Considérese la aplicación lineal que tiene como matriz de transformación:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

como porque $p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ se ve que los valores propios de A son $2, 1$ y -1.

Para calcular el vector propio $\mathbf{v_{(2)}} = (v_1, v_2, v_3)$ asociado a 2 resolveremos la ecuación caracteristica:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1-2 & 0 \\ -1 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo por Gauss se llega a $\mathbf{v_{(2)}} = (1, 1, -1)$.