2022

Folleto de Mecánica: Estática de partículas y de cuerpos rígidos

Dra. Alda C. de Sánchez

Primera edición 2022

Volumen 1

No. 1

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL

FOLLETO DE MECÁNICA:
MECÁNICA (Estática de partículas y cuerpos rígidos)

PROFESORA
Dra. ALDA DE SÁNCHEZ

Este Folleto está diseñado para servir como guía al docente que dicta el curso de Mecánica en su primera parte de Estática de partícula y de cuerpos rígidos (CA: 0542 y 8582) y al estudiante de Ingeniería Industrial y de Ingeniería en Sistemas Computacionales que lo recibe.

Índice General Analítico

Contenido

Índice de Figuras

Introducción

Como ingenieros necesitamos saber el estado de reposo o movimiento de los cuerpos para esclarecer o predecir su comportamiento, tal es el caso de un peritaje automovilístico, diseño de puertos, levantamiento de sistemas computacionales y almacenamientos de artículos. Para ello nos ayuda la mecánica.

Conocedores que a los estudiantes de mecánica de las carreras a las cuales la Facultad de Ingeniería Civil presta el servicio no les es familiar este tema y mucho menos la forma de solución de los problemas que puedan presentarse en dicho curso. Aunado a esto, esta asignatura conlleva 2 temas que son Estática y Dinámica, por el cual algunos estudiantes no tienen los conocimientos previos para apropiarse del conocimiento y para el docente es difícil cumplir con el tiempo de 16 clases semanales para cubrir los 2 temas.

Por lo antes expuesto, en su primera edición, se plantea el estudio de la Estática en una forma sencilla correspondiente a la experiencia como docente en el curso y que ha logrado obtener mejor desempeño en el estudiantado de las carreras a las que se le ha prestado el servicio.

En el escrito subsiguiente están expuestos los conceptos básicos en el uso de vectores tanto en el plano como el espacio tales como la estática de partículas y cuerpos rígidos.

El beneficio del folleto radica en obtener mejores resultados académicos y por consiguiente la promoción de los estudiantes de otras carreras diferentes a ingeniería civil.

Capítulo I

1. Marco Conceptual

1.1. Introducción

Conocedores que los estudiantes son de otras Facultades se plantea el traspaso del conocimiento en forma sencilla y amena, haciendo laboratorios, explicando el tema en forma directa.

1.2. Antecedentes

La bibliografía existente es muy basta, sin embargo, no específica a los temas propuestos para los estudiantes de la Facultad de Ingeniería en Sistemas Computacionales e Ingeniería Industrial

1.3. Planteamiento del Problema

Los estudiantes no tienen todos los conocimientos previos para avanzar en esta asignatura que está compuesta de 2 temas a la vez (Estática y Dinámica). Hay muy poco tiempo para abarcarlas en 16 semanas. Es por eso que, el material a enseñar debe ser dirigido específicamente. Adicionalmente, los estudiantes no están relacionados con los vectores en el espacio dificultándoles el aprendizaje.

1.4. Justificación

La bibliografía existente es muy basta, sin embargo, no específica a los temas propuestos para los estudiantes de Las Facultades De Ingeniería En Sistemas Computacionales E Industrial. En las 16 semanas de clases semestrales, el docente tiene que usar mucha creatividad para cumplir con el plan propuesto de la asignatura y lograr que el aprendizaje sea aprovechado por los estudiantes.

1.5. Objetivo General

- Desarrollar la capacidad analítica en la solución de problemas de la mecánica relativos a la estática.

1.5.1. Objetivos Específicos

- Definir los conceptos básicos de la estática de partículas, cuerpos rígidos, centroide y momento de inercia de un cuerpo.
- Explicar las relaciones o expresiones matemáticas útiles para el desarrollo de problemas relativos a la estática.
- Resolver problemas de práctica que apoyen al estudiante en su estudio

Al finalizar las clases el estudiante podrá construir su propio conocimiento mediante asignaciones de problemas relativos a cada tema.

1.6. Alcance

Este folleto está diseñado para servir como guía al docente que dicta el curso de Mecánica (CA: 0542 y 8582) y coadyuvar a desarrollar en el estudiante la capacidad analítica al solucionar problemas en este ámbito. El mismo, está orientado a definir la mecánica como ciencia, exponer los principios que lo sustentan y, desarrollar relaciones y procedimientos de la estática de partículas y estática de cuerpos rígidos que es donde los estudiantes presentan problemas de aprendizaje.

Capítulo II

2. Estática de Partículas

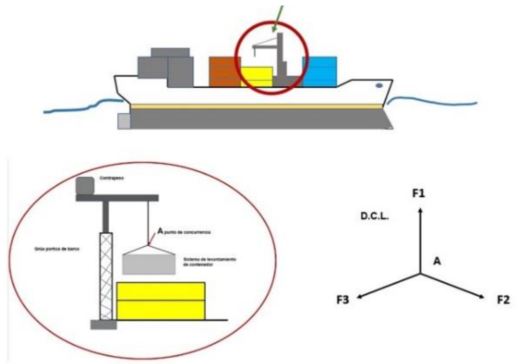
2.1. Conceptos fundamentales

2.1.1. Partícula y diagrama de cuerpo libre (D.C.L.)

Los cuerpos en estado de reposo o de movimiento constante y en línea recta son estudiados por la estática mediante los conceptos de partícula y diagrama de cuerpo libre (D.C.L).

El concepto de **partícula** puede concebirse como el espacio que ocupa un **punto** dentro del cuerpo en estudio donde concurren o llegan todas las fuerzas que lo afectan. En la figura 1, en su parte superior, se presenta un buque o barco portacontenedores que posee su propio sistema de grúas para levantar la carga representada por los contenedores. Inmediatamente abajo a la izquierda, se ve el sistema de grúa pórtico. Todo este sistema puede estudiarse a través de un diagrama de fuerzas llamado: Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) que contiene a la partícula A en estudio y las fuerzas que llegan o concurren a dicho punto. En la misma figura 1, en su parte inferior derecha, se presenta el D.C.L. de la partícula A o punto de concurrencia de todas las fuerzas involucradas (F1, F2 y F3) en la actividad de levantamiento de contenedores de la grúa presentada.

Figura No. 1 Diagrama de cuerpo libre (D.C.L.)



Nota. Fuente propia

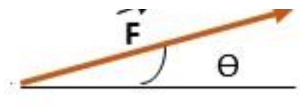
Entonces, el término partícula se utiliza cuando el tamaño, la forma y las dimensiones de los cuerpos en consideración no afectará en la solución de los problemas. También se considera que **todas las fuerzas ejercidas** sobre el cuerpo en cuestión actúan sobre el **mismo punto**.

Lo anteriormente expresado nos lleva a otro concepto importante en el estudio de la estática de partículas que son las fuerzas.

Una fuerza es la acción de un cuerpo sobre otro. matemáticamente, se representa mediante vectores.

Vectores: La figura 2 muestra un ejemplo de un vector. Los vectores son expresiones matemáticas que poseen magnitud (largo del segmento), dirección (ángulo que hace el vector, generalmente, con la horizontal) y sentido (punta de flecha).

Figura No. 2. Vector fuerza



Nota. Fuente propia

2.1.2. Clasificación de fuerzas

Antes de seguir, es primordial conocer las fuerzas que intervendrán en nuestro estudio, éstas son:

Las fuerzas externas: todas las fuerzas que inciden sobre el cuerpo en estudio o que afectan a la partícula desde una fuente externa.

Fuerzas internas: son las fuerzas que mantienen unidas todas las partes del cuerpo en estudio. *Cabe destacar que, éstas no se verán en el análisis, a menos que, se haga un corte imaginario en el cuerpo de estudio*.

2.1.3. Condición de Equilibrio de una partícula

Las condiciones de equilibrio de una partícula las podremos interpretar mejor si antes damos un repaso a las tres leyes fundamentales de Sir Isaac Newton, formuladas en el siglo XVII (Sebastiá. J., 2013). Pasamos a anunciarlas:

1° Ley: si la resultante ® de las fuerzas que actúa sobre una partícula es igual a cero, la partícula permanecerá en reposo si al inicio se encontraba en reposo o se moverá en línea recta y a velocidad constante si originalmente se encontraba en movimiento.

$$\mathbf{R = \sum F = 0}$$

Esta ley nos habla claramente de las condiciones del equilibrio de una partícula.

2°Ley: Si la resultante de un sistema de fuerzas que actúan sobre una partícula no es igual a cero, entonces se generará una aceleración proporcional a la fuerza y en la misma dirección de la fuerza resultante.

$$\mathbf{R = \sum F \neq 0 = ma}$$

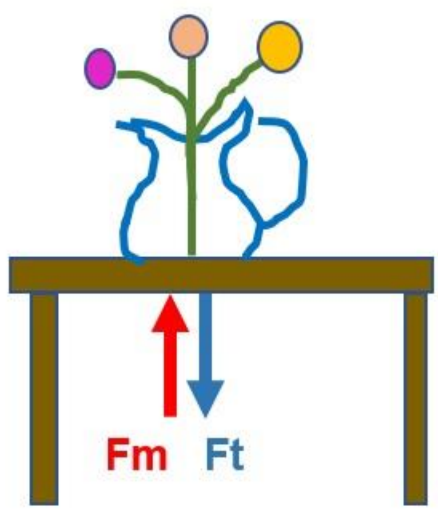
$$\mathbf{R = ma}$$

Donde m es la constante de proporcionalidad que representa la masa del cuerpo, y **a** es la aceleración proporcional a la fuerza resultante.

Esta ley es especialmente útil en la segunda parte del curso de mecánica en donde se aborda la cinética de partículas: fuerza, masa y aceleración.

3° Ley: Acción y Reacción. Para cada acción hay una reacción con igual magnitud, dirección, pero en sentido contrario. En la figura 3 podemos ver que sobre la mesa se coloca un florero. Éste ejerce una fuerza sobre la mesa Ft y la mesa responde con una fuerza igual en magnitud, dirección; pero sentido contrario Fm

Figura No. 3 *Fuerzas de acción y reacción*



Nota. Fuente propia

2.1.4. Retroalimentación #1

1. ¿Qué es mecánica?

Es la ciencia que describe y predice las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de fuerzas. Se divide en tres partes:

-Mecánica de cuerpos rígidos

-Mecánica de cuerpos deformables

-Mecánica de fluidos

2. ¿Cómo se define una fuerza?

Es aquella que representa la acción de un cuerpo sobre otro. Puede ser ejercida a través de un contacto directo o a distancia.

3. Enuncie la ley del paralelogramo

Establece que dos fuerzas que actúan sobre una partícula pueden ser reemplazadas por una sola fuerza, llamada la resultante, que se obtiene dibujando la diagonal del paralelogramo cuyos lados son iguales a las fuerzas dadas.

4. ¿Qué dice el principio de transmisibilidad?

Establece que la condición de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecerá inalterada si una fuerza que actúa en un punto dado del mismo se reemplaza por una fuerza de la misma magnitud y dirección, pero que actúa en un punto distinto, siempre y cuando ambas fuerzas tengan la misma línea de acción.

5. Enuncie las tres leyes de newton

Primera ley: Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en movimiento).

Segunda ley: Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la misma dirección.

Tercera ley: Las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos.

2.2. Estática de Partícula

Habiendo revisado las tres leyes de Newton podemos adentrarnos en el equilibrio de una partícula.

2.2.1. Equilibrio de una partícula

Todo lo antes expresado, nos ayuda a conocer el estado de reposo o equilibrio de una partícula. Si la *resultante de un sistema de fuerzas es exactamente igual a cero* entonces, la partícula se encontrará en reposo si, en un principio estaba en reposo o se moverá en línea recta y a velocidad constante, si inicialmente se movía (véase la figura 4)

Matemáticamente, se puede expresar de esta forma:

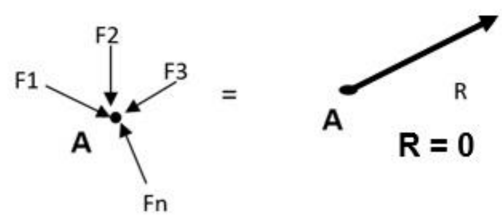
Figura No. 4 Equilibrio de una partícula en el plano

$$\sum F = F1 + F2 + F3 \ + \cdots Fn = R = 0$$

$$R = Rxi + Ryj = 0$$

$$Rx = \Sigma Fx = 0$$

$$Ry = \Sigma Fy = 0$$



Nota. Fuente propia. Adaptada de Mecánica Vectorial para ing. Estática. Beer, F.

A este punto se ha introducido otro concepto, él es: ***Fuerza Resultante***. Entonces, es de suma importancia referirnos al mismo.

2.2.2. Resultante de un sistema de fuerzas concurrentes

Generalmente, en un instante, sobre un punto de un cuerpo inciden más de una fuerza que afectan su condición estática (viento, su propio peso, tensiones, etc.). Entonces, se dice que la partícula está sometida a un sistema de fuerzas concurrentes.

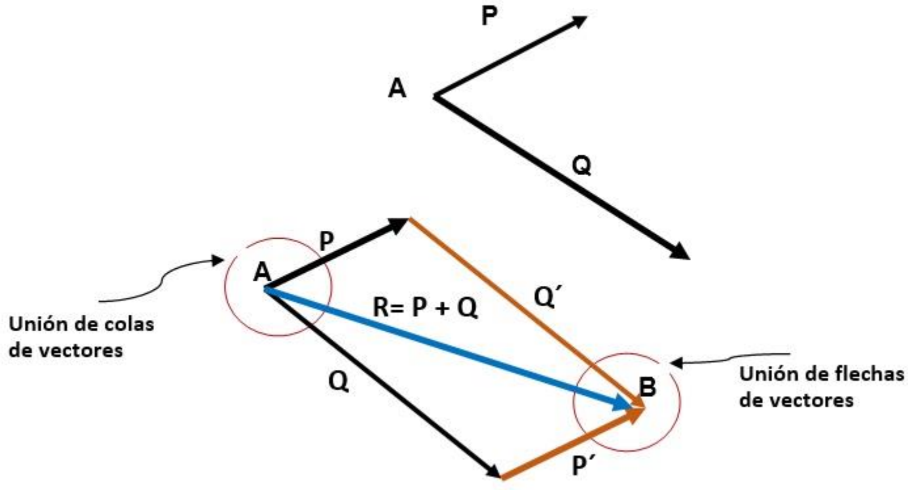
Este sistema de fuerzas concurrentes puede ser *reemplazada* por una sola fuerza ***R***. Dicha fuerza se le conoce como *fuerza resultante*. El requisito que debe cumplir la resultante de todas las fuerzas es que ***ejecute el mismo efecto*** sobre la partícula como el sistema de fuerzas concurrentes originalmente actuante sobre ésta. La fuerza resultante del sistema se obtiene sumando todas las fuerzas apostadas en la partícula en estudio. Sin embargo, como las fuerzas son vectores tendremos que abocarnos a **los procedimientos establecidos para la suma de los vectores**.

2.2.3. Procedimiento para la suma o adición de vectores

2.2.3.1. Ley del paralelogramo

La suma **R** de dos vectores P y Q, es otro vector y se obtiene uniendo los dos vectores al mismo punto A, construyendo un paralelogramo que tenga por lados a P´ y Q´ como se muestra en la figura 3 (Beer, F., 2004).

Figura No. 5. Ley del paralelogramo



Nota. Fuente propia adaptada de Mecánica Vectorial para ing. Estática. Beer, F.

Hay que enfatizar que la resultante *R es un vector*, cuya magnitud está representada por la longitud del segmento AB, y su sentido puede encontrarse en donde se *unen todas las puntas de flecha* de los demás vectores. La obtención de su dirección la explicaremos más adelante. La ley del paralelogramo es especialmente útil en la suma de dos vectores fuerza (vea la figura 5).

Propiedad conmutativa de la suma de vectores

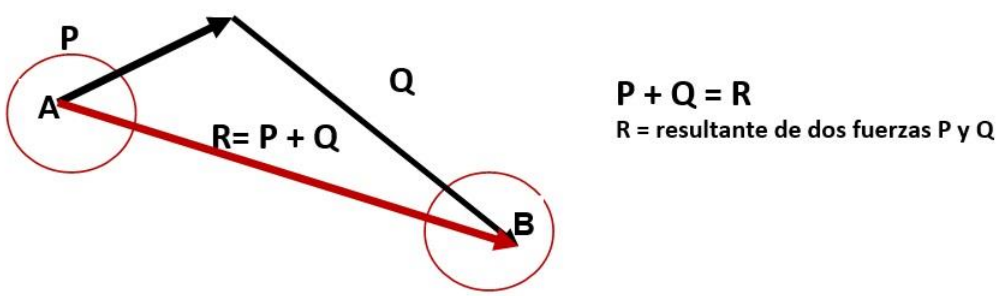
Observando la figura 4, vemos que el paralelogramo construido con los vectores P y Q está formado por dos triángulos. Nos percatamos que si usamos el triángulo superior podemos obtener R sumando P + Q´. De la misma manera, si usamos el inferior R también resulta si sumamos Q + P´. Esto nos indica que R no depende del orden en el cual P y Q son seleccionados. A partir de esta premisa concluimos que la suma de vectores es conmutativa.

P + Q = Q + P

2.2.3.2. Regla del triángulo

A partir de la Ley del paralelogramo, se deriva un método alternativo para sumar dos vectores llamada la **Regla del Triángulo** (vea la figura 6). Desde ésta, la suma de P y Q puede obtenerse colocando P y Q de punta a cola y uniendo la cola de P con la punta de Q. Se puede considerar el orden inverso y se obtendrá el mismo resultado. Veamos la figura 6 (Ramos y Suárez, 2018).

Figura No. 6 Regla del Triángulo



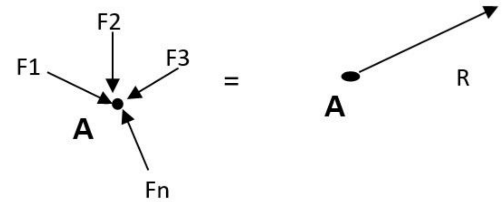
Fuente propia. *Adaptada de Mecánica Vectorial para ing. Estática, Beer, F.*

Resultante de varias fuerzas concurrentes (R)

Por lo general, los cuerpos están sometidos a un sinnúmero de fuerzas, en estos casos aún el término de fuerza resultante sigue siendo de utilidad. Es así como, la resultante se define como la fuerza que <u>**reemplaza**</u> a un sistema de fuerzas que actúa sobre una partícula A y puede obtenerse como se observa en la figura 7.

Figura No. 7. Obtención de la resultante R

$$\sum F = F1 + F2 + F3 \ + \cdots Fn = R$$



Nota. Fuente propia. Adaptada de Mecánica Vectorial para Ing. Estática. Beer, F

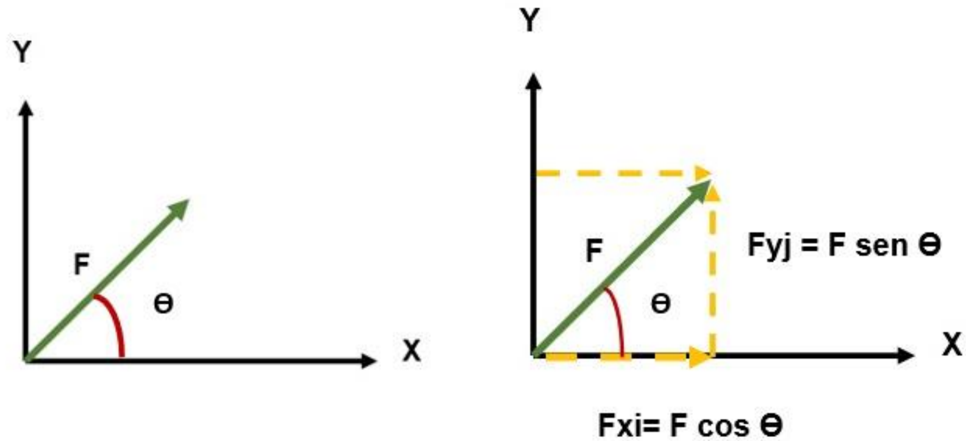
Sin embargo, no es conveniente valernos de la ley del paralelogramo o regla del triángulo para encontrar la resultante de un sistema concurrente compuesto por varias fuerzas. En este caso podemos utilizar la descomposición vectorial.

2.2.3.3. Descomposición vectorial

Existe un número infinito de descomponer una fuerza en componentes. No obstante, nos referiremos a la descomposición de fuerzas rectangulares.

Como vemos en la figura 8, una fuerza contenida en el plano XY puede descomponerse o buscar sus proyecciones sobre el eje X y sobre el eje Y siempre y cuando tengamos información suficiente, como por ejemplo la magnitud, la dirección y el sentido de la fuerza. Por otro lado, trataremos de indicar que, asociado a los ejes X e Y, están los vectores unitarios i y j. De manera que, las componentes de la fuerza dada pueden encontrarse al construir el triángulo de fuerzas que describe a la fuerza F. Cabe señalar que, es importante la dirección de la fuerza, porque en función de éste se va a buscar sus componentes.

Figura No. 8. Descomposición de una fuerza en sus componentes rectangulares en función del ángulo Ɵ.



Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

Descomposición en función del ángulo Ɵ

Para descomponer la fuerza F en función del ángulo Ɵ, vemos que la posición de Fx es adyacente (está al lado) al ángulo Ɵ y Fy se encuentra frente al mismo ángulo. Por ello Fx = F cos Ɵ y Fy = F sen Ɵ.

En general, podemos plantear la fuerza F en función del ángulo Θ como:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{Fxi} + \overrightarrow{Fyj}$$

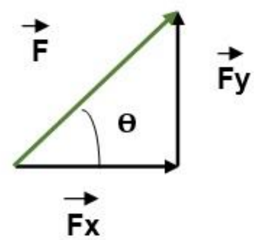
$$\overrightarrow{F} = F\,\overrightarrow{(\cos\Theta)}\,i + F\,\overrightarrow{(\text{sen}\,\Theta)}\,j$$

Y la magnitud de la fuerza F puede obtenerse a través del teorema de Pitágoras:

$$\overrightarrow{F} = \sqrt{(Fx)^2 + (Fy)^2}$$

Como F es un vector, su dirección se puede determinar gráficamente a partir de sus componentes:

$$\tan\theta = \frac{Fy}{Fx}$$

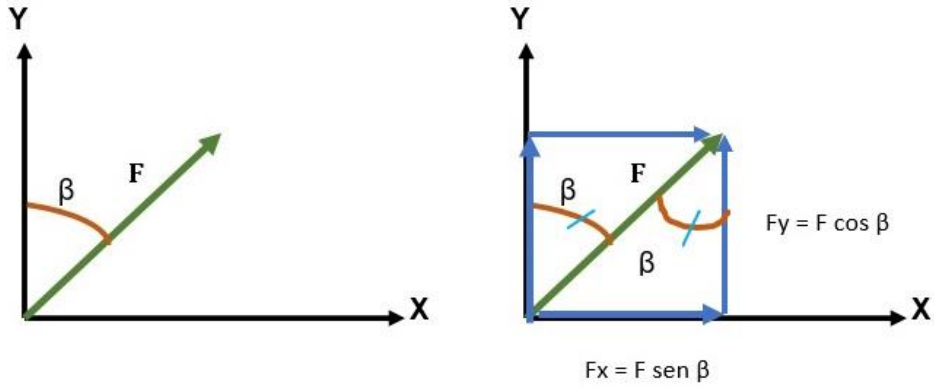


Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

Descomposición de la fuerza F en función del ángulo β

Es muy importante prestar atención de la información suministrada para descomponer F. Puede ser que el ángulo de referencia cambie, y tengamos que expresar F en función de otro ángulo. Tal es el caso del próximo ejemplo: el ángulo suministrado es **β**. A partir de éste podemos descomponer la fuerza F si observamos que en esta ocasión Fx está frente al ángulo β y Fy es adyacente a β. Entonces Fx = F sen β y Fy = F cos β (ver figura 9).

Figura No. 9. *Fuerza en función del ángulo β.*



En este caso, podemos plantear la fuerza F en función del ángulo **β** como:

$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{Fx}i + \overrightarrow{Fy}j$

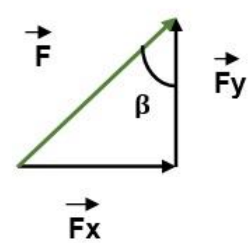
$\overrightarrow{F} = F\ \overrightarrow{(\text{sen}\ \beta)}\ i + F\ \overrightarrow{(\cos\ \beta)}\ j$

Y la magnitud de la fuerza F puede obtenerse a través del teorema de Pitágoras:

$\overrightarrow{F} = \sqrt{(Fx)^2 + (Fy)^2}$

Como F es un vector, su dirección se puede determinar gráficamente a partir de sus componentes:

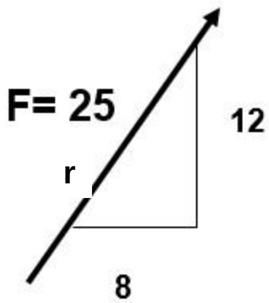
$$\tan \boldsymbol{\beta} = \frac{Fx}{Fy}$$



Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

Descomposición de F en función de su línea de acción

Por ejemplo: supongamos que F = 25 N, resolvemos:



En este caso, podemos obtener las componentes del vector F: Fx y Fy de la fuerza como sigue:

En primera instancia calculemos r

$r = \sqrt{(8)^2 + (12)^2}$

r = 14.42

A partir del valor de r, podremos encontrar sus componentes rectangulares, como sigue:

Fx = F (8/14.42) = 25 (8/14.42) = 13.87 N

Fy = F (12/14.42) = 25 (12/14.42) = 20.80 N

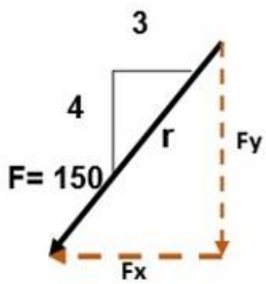
Entonces:

F = (13.87 i + 20.80 j) N

El ejemplo anterior nos lleva directamente a las componentes de la fuerza F, sin necesidad de sacar el ángulo primero y luego los valores respectivos al seno y coseno del ángulo correspondiente. Por otro lado, nos disminuye el tiempo de solución del problema.

2.2.3.4. Sistema de referencia de los vectores

Veamos el siguiente ejemplo: supongamos que F = 150 lb, resolvemos:



En este caso, podemos obtener las componentes del vector F: Fx y Fy de la fuerza como sigue:

En primera instancia calculemos r

$r = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$

$r = 5$

A partir del valor de r, podremos encontrar sus componentes rectangulares, como sigue:

$Fx = F\ (3/5) = 150\ (3/5) = 90\ lb \longleftarrow$

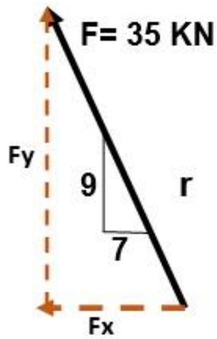
$Fy = F\ (4/5) = 150\ (4/5) = 120\ lb \downarrow$

Entonces

$F = (-\ 90\ i - 120\ j)\ lb$

Cabe destacar que, Fx apunta hacia la izquierda y Fy hacia abajo. Es el momento de establecer el sistema de referencia, el cual podemos decir que toda fuerza horizontal hacia la izquierda es negativa y toda fuerza vertical hacia abajo es negativa.

Veamos el siguiente ejemplo: supongamos que F = 150 lb, resolvemos:



En este caso, podemos obtener las componentes del vector F: Fx y Fy de la fuerza como sigue:

En primera instancia calculemos r

$r=\sqrt{(7)^2 + (9)^2}$

r = 11.4

A partir del valor de r, podremos encontrar sus componentes rectangulares, como sigue:

Fx = F (7/11.4) = 35 (7/11.4) =

Fy = F (9/11.4) = 35 (9/11.4) =

Entonces:

F = (- 90 i - 120 j) lb

Cabe destacar que, Fx apunta hacia la izquierda y Fy hacia abajo. Es el momento de establecer el sistema de referencia, el cual podemos decir que toda fuerza horizontal hacia la izquierda es negativa y toda fuerza vertical hacia abajo es negativa.

En resumen, podemos acotar que:

Sistema de referencia	***Positivo***	***Negativo***
Fx	→	←
Fy	↑	↓

Nota. Fuente propia

2.3. Trabajo en clase #1

UNIVERSIDAD TECNLÓGICA DE PANAMÁ
CENTRO REGIONAL DE PANAMÁ OESTE
ESTATICA DE PARTÍCULAS
TRABAJO No.1 (INTRODUCCIÓN)

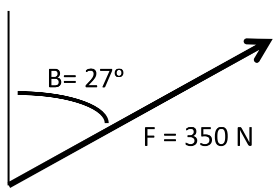
NOMBRE: ____________________________ CÉDULA: _____________________

1. Convierta los datos suministrados a las unidades solicitadas

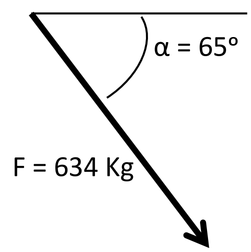
   a. 20 N (kg), b. 358 m/s (Km/hr.) c. 853 Mi/hr^2 (m/s^2) d. 177 lb./pul^2 (kg/cm^2)

a) _____________ b) _____________ c) _______________ d) ________________

2. Descomponga los vectores dados en sus componentes horizontal y vertical

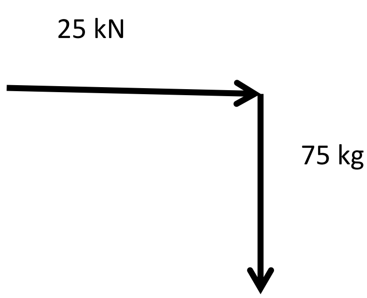


(a)

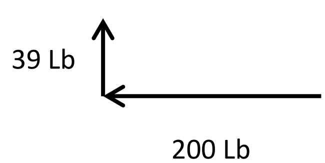


(b)

3. Dadas las componentes, encuentre el vector



(a)



(b)

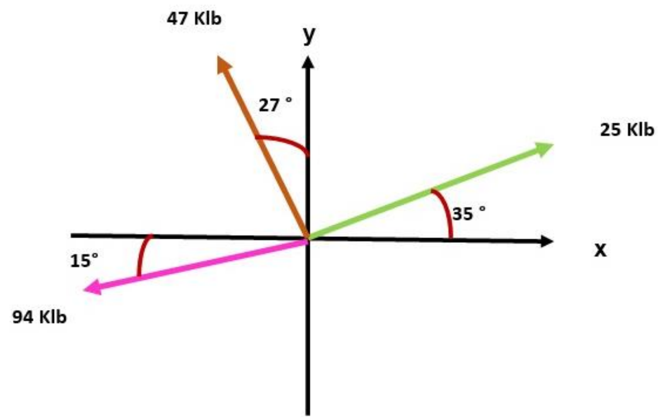
2.4. Práctica 1. Adición de vectores (Resultante)

Objetivo: al finalizar el estudiante estará en la capacidad de distinguir el punto de concurrencia de las fuerzas que actúan en una partícula, dibujar el D.C.L., plantear la solución a los problemas de resultante de varias fuerzas concurrentes en una partícula y de equilibrio de una partícula.

Determine la resultante de las fuerzas que se aplican en el punto A. utilizar los datos suministrados.

Problema 1.

Se recomienda seguir los conceptos antes explicados y crear la tabla que se adjunta. También llevar un orden de solución para minimizar los errores. En este caso, usaremos la dirección contraria a las manecillas del reloj. En otras palabras, iniciaremos con la fuerza de 25, luego con la de 47, por último, con la de 94 Klb.



Fx → +		Fy ↑ +	
25 cos 35	= 20.48	25 sen 35	= 14.34
- 47 sen 27	= - 21.33	47 cos 27	= 41.87
- 94 cos 15	= - 90.79	- 94 sen 15	= - 24.33
	$\Sigma Fx = - 91.64$		$\Sigma Fy = 31.88$

Aplicando el teorema de Pitágoras podemos encontrar la magnitud de la resultante:

$$R = \sqrt{(-91.64)^2 + (31.88)^2}$$

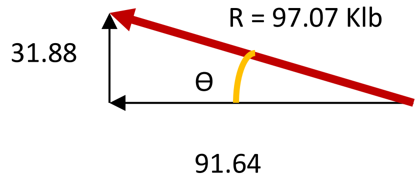
R = 97.07 Klb

Para buscar la dirección podemos hacerlo gráficamente:

Tan ϴ = 31.88/91.64

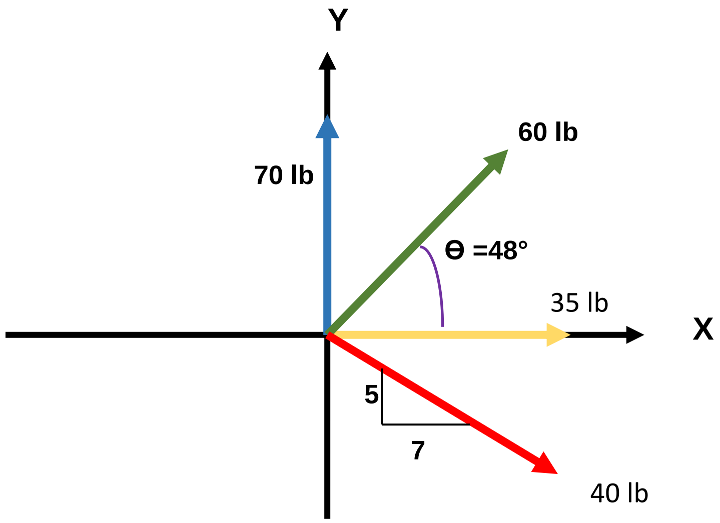
ϴ = tan -1 (0.35)

ϴ = 19.29 °



Problema 2

Determinar la resultante de las fuerzas dadas. Utilizar los datos que se suministran en el problema.

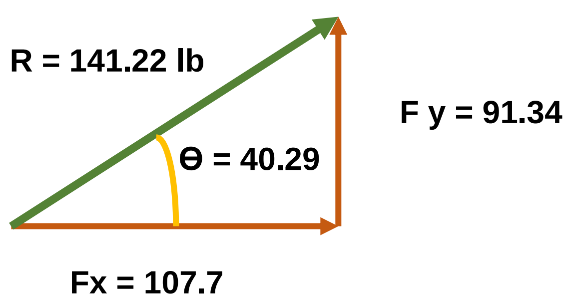


Para la solución seguiremos el orden circular antihorario, empezando con la fuerza de 40 lb y construiremos la tabla de componentes de fuerzas con el sistema de referencia que se utilizará.

$$r = \sqrt{5^2 + 7^2}$$

$$r = 8.6$$

Fx → +		Fy ↑ +	
40 (7/8,6)	= 32.55	- 40 (5/8.6)	= - 23.25
35	= 35	0	= 0
60 cos 48	= 40.15	60 sen 48	= 44.59
0	= 0	70	= 70
	ΣFx = 107.7		**ΣFy = 91.34**



$$R = \sqrt{(107.7)^2 + (91.34)^2}$$

$$R = 141.22\ lb$$

$$\mathbf{tan}\,\theta = \left(\frac{\mathbf{91.34}}{\mathbf{107.7}}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1} 0.848$$

Ɵ = 40.29°

Retroalimentación:

Observe que:

la fuerza de 35 lb tiene sentido positivo (hacia la derecha) y está sobre el eje X, lo que significa que no tiene componente en Y.

La fuerza de 70 lb tiene sentido positivo (hacia arriba) y está sobre el eje Y, lo que significa que no posee componente en X

Habiendo repasado los conceptos de resultante y métodos de suma o adición de vectores, podemos entrar en el estudio del equilibrio de partículas en el plano.

2.5. Equilibrio de una partícula en el plano

Con la información precedente podremos desarrollar mejor el concepto de equilibrio de partícula con la información precedente.

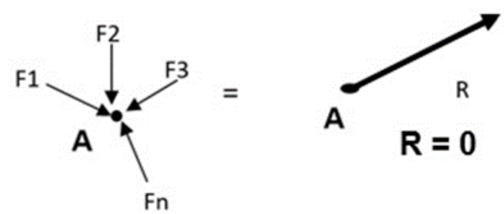
Decimos que, ***<u>cuando la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero la partícula se encontrará en equilibrio</u>***. Y lo podemos expresar como:

$$\sum F = F1 + F2 + F3 + \cdots Fn = R = 0$$

$$R = Rxi + Ryj = 0$$

$$Rx = \Sigma Fx = 0$$

$$Ry = \Sigma Fy = 0$$

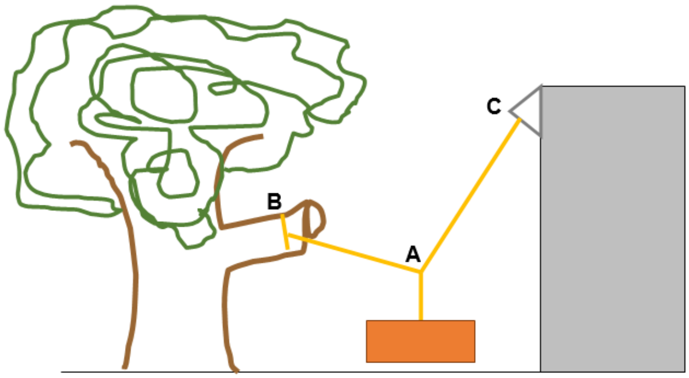


Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

La resultante R es un vector, en el caso de partículas en equilibrio, ésta es exactamente igual a cero. Como R es un vector en el plano, está compuesto de sus componentes Rxi y Ryj y para que se cumpla el equilibrio ambas componentes también deben ser igual a cero.

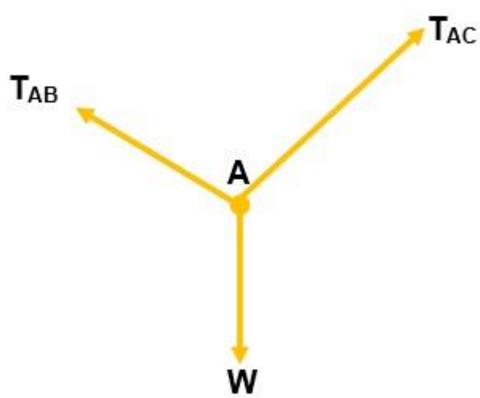
2.5.1. Diagrama de cuerpo libre de un sistema en equilibrio (D.C.L.)

Figura No. 10 Equilibrio de partícula



En la figura 10 vemos que un elemento es colgado en la **posición de reposo** por dos cuerdas: AB y AC, en otras palabras, **el cuerpo está en equilibrio**. Además, **identificamos la partícula A** o el punto donde concurren todas las fuerzas. Haciendo un corte imaginario en ambas cuerdas y recordando que las fuerzas internas aparecen en el corte, podemos hacer el diagrama de cuerpo libre correspondiente (ver la figura 11), como sigue:

Figura No. 11 Diagrama de cuerpo libre de una partícula en equilibrio



Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

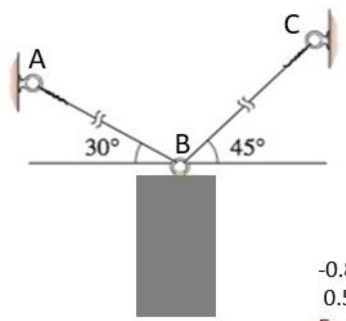
Teniendo los conceptos generales de D.C.L., clasificación de fuerzas, leyes de Newton, métodos de suma de vectores y el concepto de equilibrio de partícula podemos arribar a la práctica de este tema.

Diagrama de cuerpo libre (D.C.L.)

2.6. Práctica #2. Equilibrio de Partículas (ΣF=R=0)

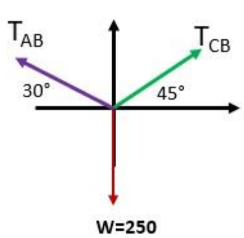
Problema 1.

Si el peso de un servidor para una gran industria computacional es de 250 lb, determine la tensión en los cables AB y AC.



FX ⟶ +	FY ↑ +
$- T_{AB} \text{ COS } 30 = - 0.87\ T_{AB}$	$T_{AB} \text{ SEN } 30 = 0.5\ T_{AB}$
$T_{AB} \text{ COS } 45 = \ 0.7071\ T_{BC}$	$T_{BC} \text{ SEN } 45 = 0.7071\ T_{BC}$
0	- 250
∑Fx=0	∑Fy=0

D.C.L



$-0.87T_{AB} + 0.7071\ T_{BC} = 0$ (1)

$0.5\ T_{AB} + 0.7071\ T_{BC} - 250 = 0$ (2)

En (1)

$0.7071\ T_{BC} = 0.87T_{AB}$

$T_{BC} = 0.87T_{AB} / 0.7071$

$T_{BC} = 1.23\ T_{AB}$ (3)

En (2)

$0.5\ T_{AB} + 0.7071\ (1.23T_{AB}) - 250 = 0$

$1.37\ T_{AB} = 250$

$T_{AB} = 250/1.37$

$T_{AB} = 182.5$ lb

En (3)

$T_{BC} = 1.23\ (182.5)$

$T_{BC} = 244.5$ lb

ING. ALDA C. DE SANCHEZ – I SEM. 2022

Retroalimentación:

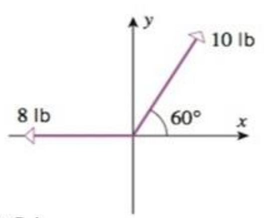
Para abordar estos tipos de problemas sugerimos ser ordenados y tomar los siguientes pasos:

1. Leamos el problema con detenimiento

2. Asegurémonos que se trata de un problema de equilibrio
3. Realicemos el corte imaginario para observar las fuerzas que intervienen
4. Hagamos el D.C.L. Coloquemos todas las fuerzas que intervienen y los ángulos correspondientes.
5. Sugerimos hacer la tabla y colocar el sistema de referencia (no nos olvidemos de los signos negativos de las componentes de fuerzas)
6. Planteamos las ecuaciones, considerando el ángulo de referencia para cada vector fuerza y realizamos los procedimientos matemáticos que resuelven el sistema.

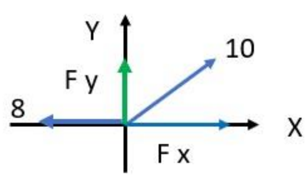
Problema 2.

Determine la fuerza que equilibra el sistema.



D.C.L

$\Sigma F_x = 0$ $\longrightarrow$ +	$\Sigma F_y = 0$ $\uparrow$ +
10 cos 60° = 5	10 sen 60°= 8.67
- 8	0
F x	F y



$$R = \Sigma F_x + \Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$\Sigma F_x = 0$; $5 - 8 + F_x = 0$

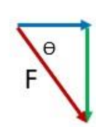
$F_x = 8-5$

$F_x = 3$ lb $\longrightarrow$

$\Sigma F_y = 0$; $8.67 + 0 + F_y = 0$; $F_y = -8.67$; $F_y = 8.67$ lb $\downarrow$

$F = \sqrt{(3)^2 + (-8.67)^2} = 9.17$ lb

$\theta = \tan^{-1}(8.67/3) = 70.91$



Retroalimentación del problema:

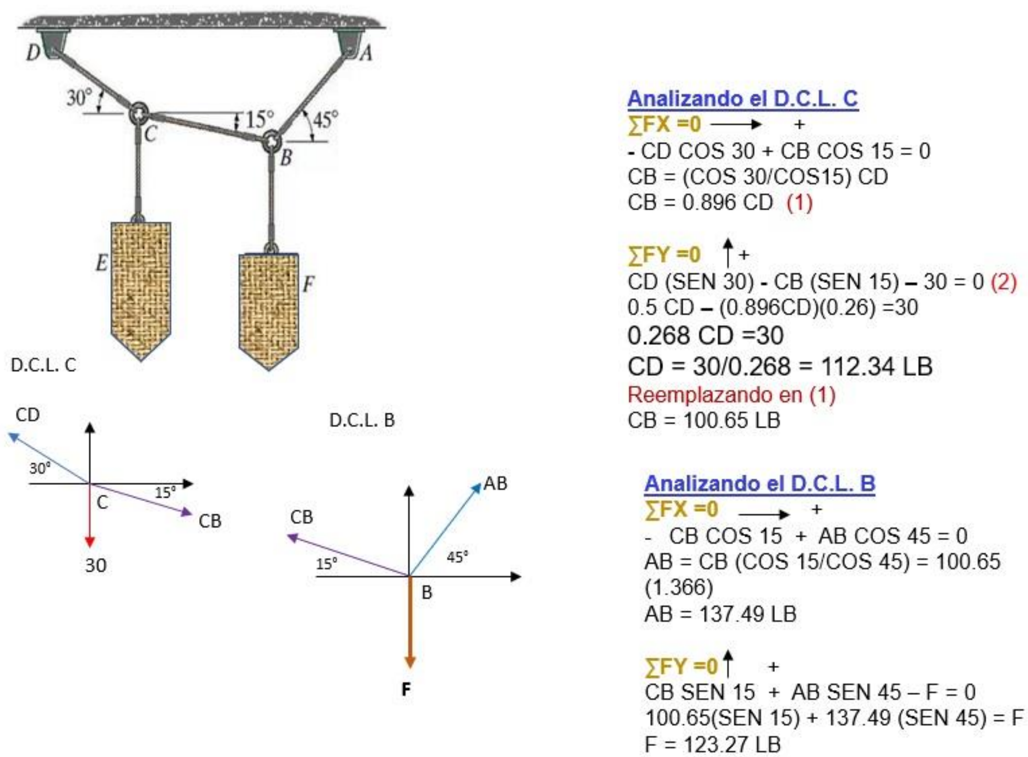
1. Este caso se trata de un problema de equilibrio. Nos piden una fuerza que equilibra el sistema. Como no sabemos nada sobre ésta, asumiremos que

es un vector fuera en su forma general: magnitud desconocida F, con componentes Fxi y Fyj, como vemos en la tabla sugerida

2. Hay que estar atentos con la fuerza de 8 lb. Esta está totalmente sobre el eje X o es totalmente horizontal. Por lo que, la componente en Y = 0
3. La respuesta final: F es un vector, por ello se da sus componentes en Fx y Fy, su sentido y su dirección ϴ = 70.91° y su magnitud 9.17 lb

Problema 3.

Se desea colocar dos contrapesos como se observa en la figura. Suministrado el peso en E = 30 lb, determine el peso del contrapeso en F.



Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

Retroalimentación del problema:

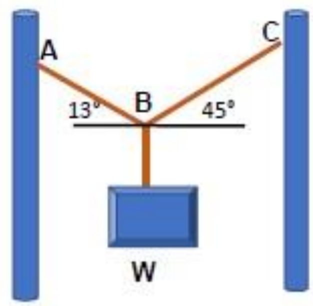
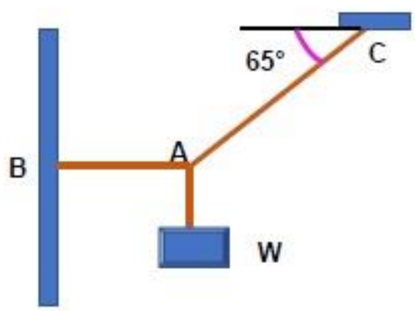
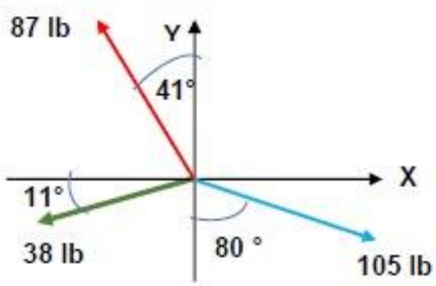
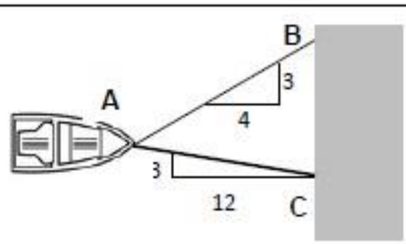
1. Este problema es interesante porque está compuesto por dos cuerpos. Por lo antes expuesto, tendremos dos partículas a analizar: C y B.

2. Al construir los D.C.L. de C y B, vemos que, el elemento CB es común a los dos cuerpos.
3. Al revisar los datos suministrados, vemos que nos dan el peso del cuerpo E. Por lo tanto, podemos empezar la solución por el D.C.L. en C y determinar el valor de la fuerza CB, la cual utilizaremos en el D.C.L. en B para encontrar el peso en F.

2.7. Asignación o Tarea #1

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
CENTRO REGIONAL DE PANAMÁ OESTE
MECÁNICA
ESTÁTICA DE PARTÍCULAS
Tarea #1

Nombre: ______________________ **Cédula:** ______________________

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>1. Si la tensión en el cable AB es de 135 KN, determine el peso W</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>2. Si W = 75 Kg, determine la fuerza existente en AB y AC.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>3. ¿Está la partícula A en equilibrio? Sustente su respuesta</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>4. El bote se amarra en los bolardos del muelle como se ve en la figura. Si la fuerza que ejerce el bote debido a la corriente es de 5000 kip, ¿Cuánto serán las tensiones AB y AC para mantener el equilibrio de la lancha?</td>
</tr>
</table>

2.8. Equilibrio de una partícula en el espacio por medio de componentes rectangulares

Antes de entrar en la solución de problemas de una partícula que se encuentra en el espacio, debemos abordar unos conceptos importantes.

2.8.1. Partícula en el espacio

Consideremos el sistema de ejes coordenados X, Y, y Z, éstos conforman el espacio o, dicho de otra manera, representan el espacio en el que puede encontrarse una partícula.

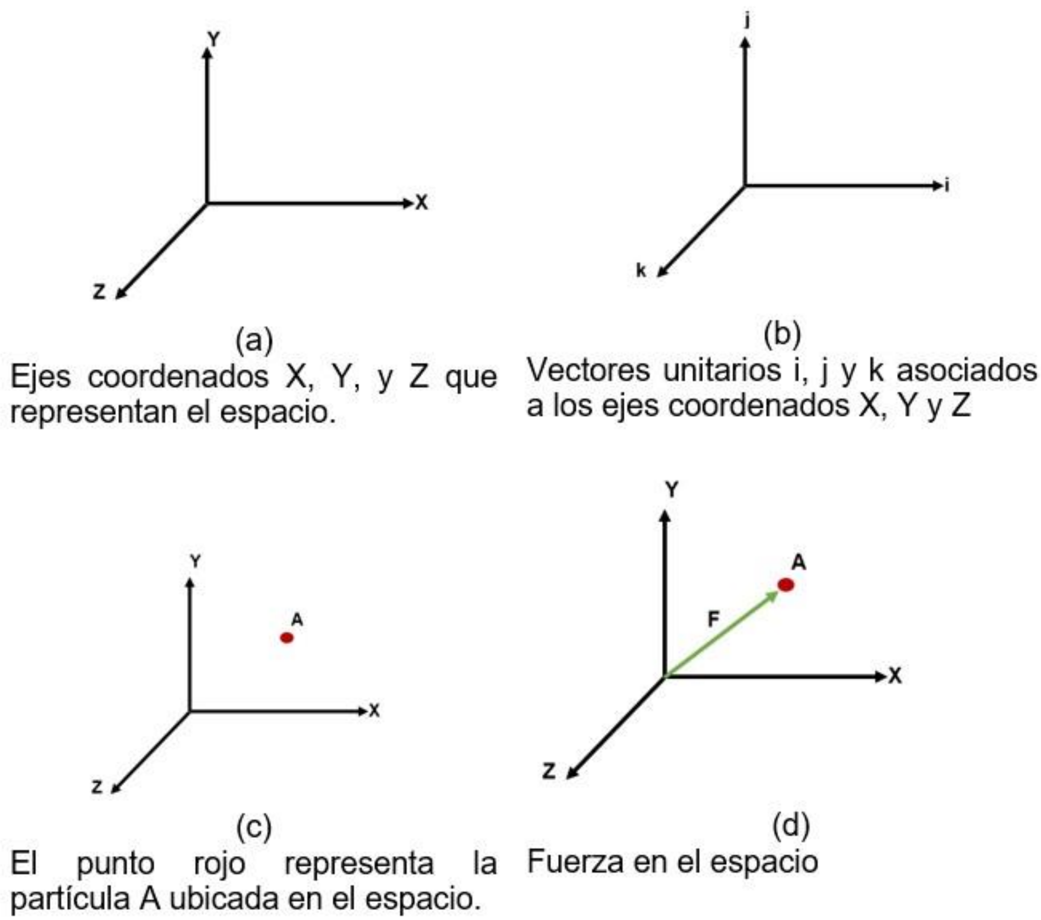
Estudiaremos la partícula ubicada en el espacio sometida a fuerzas y que se encuentra en equilibrio. Por ello, debemos definir la fuerza en el espacio. La figura 11 presenta paso a paso: (a) el concepto de espacio representado por los ejes coordenados X, Y y Z, (b) vectores unitarios (i, j y k) asociados a los ejes coordenados X, Y y Z, (c) la ubicación de una partícula A en el espacio y (d) la misma partícula afectada por una fuerza F.

Seguidamente, hay que definir la fuerza en sus componentes rectangulares Fx, Fy y Fz. Para ello, será de gran ayuda la figura 12 en donde se distingue: (a) nuevamente la fuerza en el espacio, (b) la configuración de los planos XY, Yz y XZ; los cuales están a 90° cada uno entre sí, (c) siguiendo la trayectoria de la fuerza F de cola a punta de flecha, se puede descomponer la fuerza F en sus dos componentes rectangulares Fy y Fh. Cabe destacar que, Fh reposa sobre el plano XZ como se observa en la figura 12 (d) y por ello, se puede descomponer en sus componentes Fx y Fz.

Entonces

$$F = \sqrt{Fy^2 + Fh^2}$$

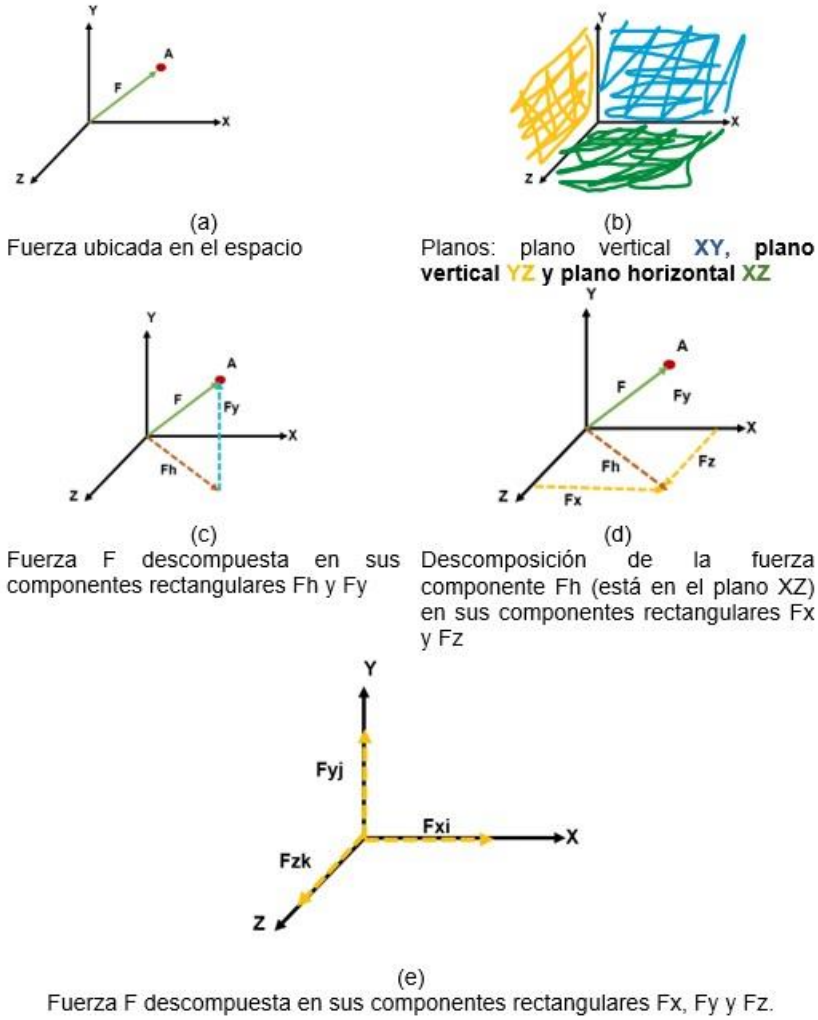
Figura No. 12. Partícula en el espacio



Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

Para continuar en la descomposición de la fuerza F a fin de encontrar sus otras componentes (Fx y Fz), tenemos que acudir a la figura 13. Donde se descompondrá la fuerza Fh que reposa sobre el plano XZ.

Figura No. 13 Fuerza F descompuesta en sus componentes Fx, Fy y Fz



Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

Como veremos, para el análisis es de utilidad el Teorema de Pitágoras, el cual es perfectamente aplicable a vectores en el espacio (ver figura 13), como sigue:

A partir de la figura 13 (c) Entonces podemos expresar la fuerza Fh en sus componentes Fx y Fz:

$$Fh = Fxi + Fzk$$

$$Fh^2 = Fx^2 + Fz^2$$

$$Fh = \sqrt{Fx^2 + Fz^2}$$

Reemplazando Fh^2 en la definición de F, tenemos:

$$F = \sqrt{Fy^2 + Fh^2}$$

$$F = \sqrt{Fy^2 + Fx^2 + Fz^2}$$

Reacomodando la expresión tenemos:

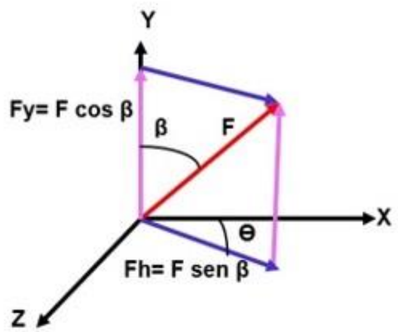
$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2 + Fz^2}$$

Esta última expresión representa el Teorema de Pitágoras aplicable a vectores en el espacio.

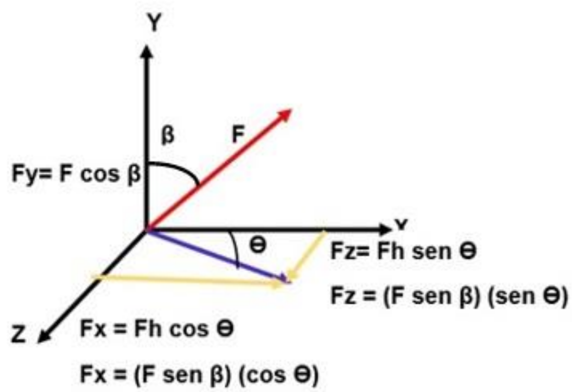
De las figuras 14 a la 17 se refuerza visualmente todo el procedimiento de descomposición de un vector en el espacio.

Por último, nos falta definir la fuerza con respecto a los ángulos β y ϴ

Figura No. 14. Descomposición de la Fh en función del ángulo ϴ



(a)
La fuerza F se descompone en función del ángulo β

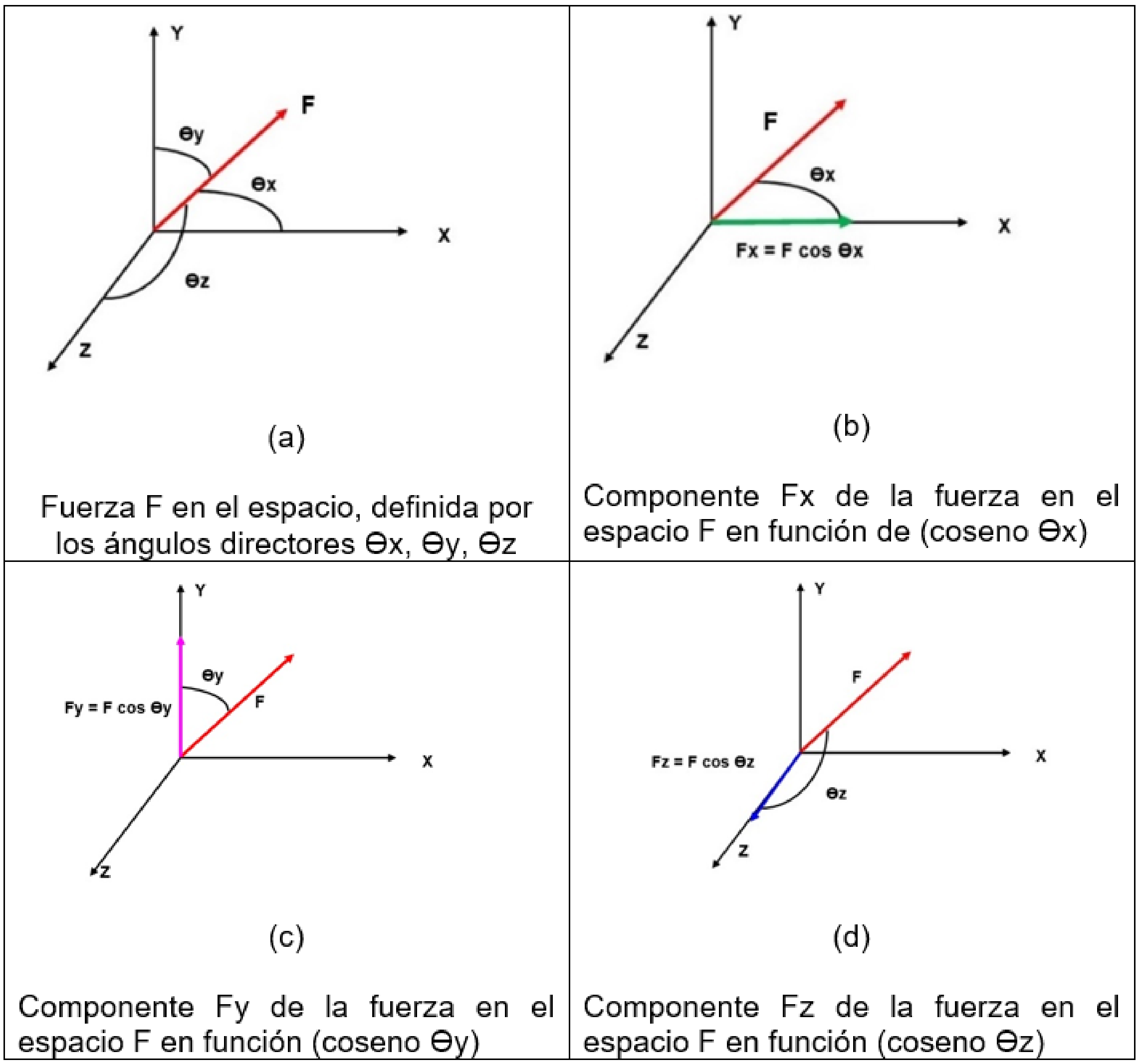


(b)
Descomposición de la fuerza Fh en función del ángulo ϴ

. **Fuente propia***. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing, Estática, Beer, F.*

La fuerza F también puede estar definida por los ángulos directores Ɵx, Ɵy, Ɵz.

Figura No. 15. Fuerza en el espacio definida por los ángulos respecto a los ejes coordenados X, Y y Z.



(a)

Fuerza F en el espacio, definida por los ángulos directores Ɵx, Ɵy, Ɵz

(b)

Componente Fx de la fuerza en el espacio F en función de (coseno Ɵx)

(c)

Componente Fy de la fuerza en el espacio F en función (coseno Ɵy)

(d)

Componente Fz de la fuerza en el espacio F en función (coseno Ɵz)

Figura No. 16. *Descomposicion de una fuerza usando los cosenos directores*

En resumen, F puede estar definida a través de sus componentes rectangulares como sigue:

$F = (F \cos \Theta x\ )i + (F \cos \Theta y)j + (F \cos \Theta z)k$; vector fuerza F

$F^2 = (F \cos \Theta x\ )^2 + (F \cos \Theta y)^2 + (F \cos \Theta z)^2$

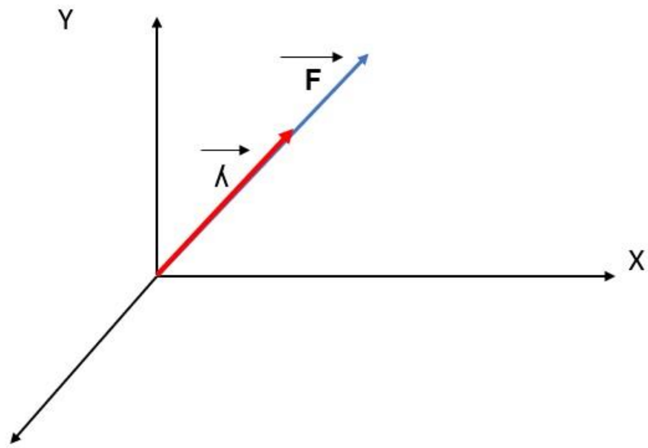
$F^2 = F^2 (\cos^2 \Theta x) + F^2 (\cos^2 \Theta y) + F^2 (\cos^2 \Theta z)$

El factor común es F^2, entonces:

$F^2 = F^2 \cos^2 \Theta x + \cos^2 \Theta y + \cos^2 \Theta z)$

1 = ʎ = (cos2 Θx + cos2 Θy + cos2 Θz)

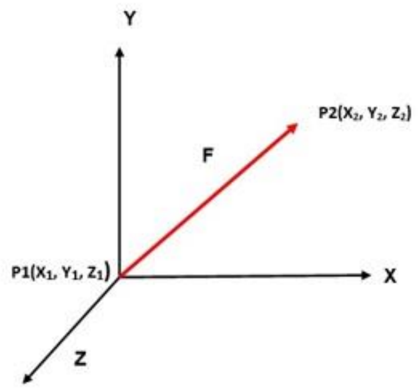
ʎ: es un vector unitario (magnitud =1), el cual va en la misma dirección y sentido que la fuerza F



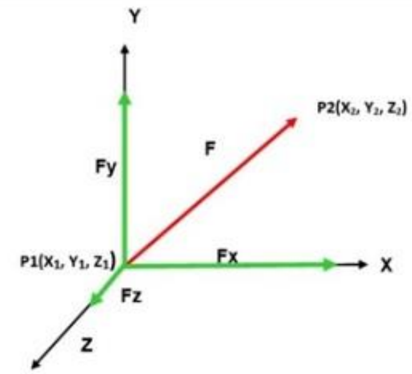
Fuente propia. *Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.*

Figura No. 17. Fuerza F definida por dos puntos sobre su línea de acción

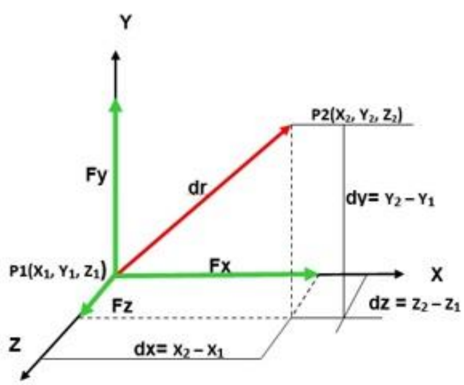
L



(a)
La fuerza F está definida por 2 puntos sobre su línea de acción



(b)
La fuerza F puede ser descompuesta en sus componentes Fx, Fy, y Fz



(c)
Línea de acción de F (dx, dy, dz)

$$dx = X_2 - X_1$$

$$dy = Y_2 - Y_1$$

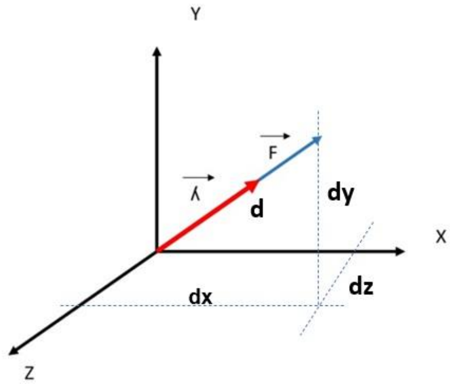
$$dz = Z_2 - Z_1$$

$$dr = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Usando el Teorema de Pitágoras para vectores en el espacio obtenemos dr y los cosenos directores de la fuerza.

$\cos \Theta x = dx/dr$, $\cos \Theta y = dy/dr$, $\cos \Theta z = dz/dr$

Fuente propia. *Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.*



Entonces, ʎ es un vector unitario (magnitud igual a 1), cuyo sentido y dirección es el mismo que el de la fuerza F

Si la fuerza está definida por sus componentes rectangulares tenemos:

$$\mathrm{d} = \sqrt{Fx^2 + Fy^2 + Fz^2}$$

Cos Θx = Fx/F; Cos Θy = Fy/F; Cos Θz = Fz/F

ʎ= $\sqrt{\cos \Theta x^2 + Cos\ \Theta y^2 + Cos\ \Theta z^2}$
ʎ= 1

Si la fuerza está definida por dos puntos sobre su línea de acción tenemos:

$$\mathrm{d} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Cos Θx = dx/d; Cos Θy = dy/d; Cos Θz = dz/d

ʎ= $\sqrt{\cos \Theta x^2 + Cos\ \Theta y^2 + Cos\ \Theta z^2}$
ʎ= 1

2.9. Laboratorio en clase

Con el objetivo de aclarar duda de los vectores en el espacio, se plantea un laboratorio con materiales del entorno con los cuales se pueda reproducir un vector en el espacio. Los estudiantes midieron la resultante, los catetos, los ángulos e hicieron diferentes verificaciones (ver figuras de la 18 a la 23).

Figura No. 18. *Replanteo de vector en el espacio*

Fuente propia. Grupo de estudiantes

Figura No. 19. *Replanteo de los lados de un vector en el espacio*

Fuente propia.

Figura No. 20. *Medición de los lados de un vector en el espacio*

Fuente propia. *Estudiantes de Mecánica*

Figura No. 21. *Equipos de estudiantes creando sus dispositivos de vectores en el espacio*

Fuente propia. Estudiantes de Mecánica

__Figura No. 22.__ Vectores en el espacio, dispositivo 1

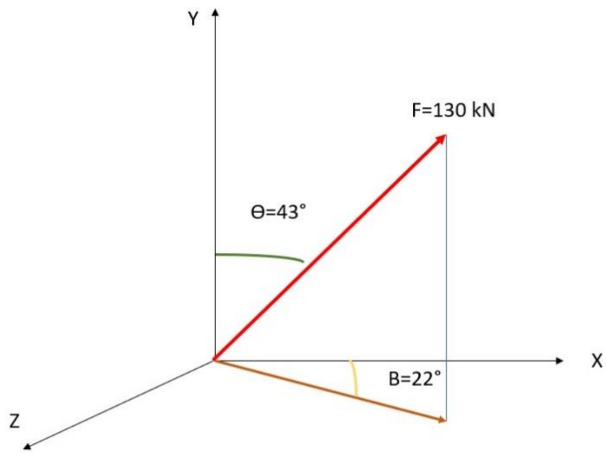
Fuente propia. Estudiantes de Mecánica

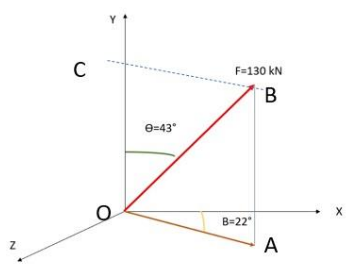
__Figura No. 23.__ Vectores en el espacio, dispositivo 2

Fuente propia. Estudiantes de Mecánica

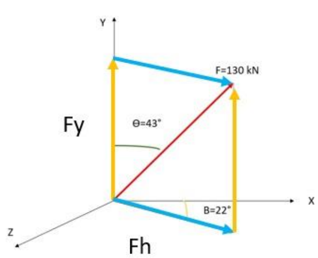
2.10. Práctica Descomposición de Fuerza en el espacio

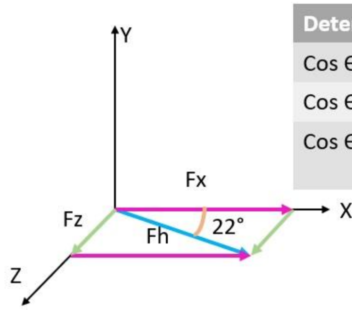
Problema 1: descomponga la fuerza F en sus componentes rectangulares





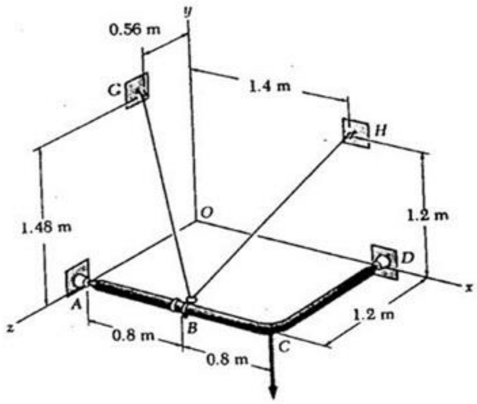
Descomposición de la Fuerza F = (Fxi + Fyj + Fzk)
1- Construimos el paralelogramo OABC
2- Observamos que OC es igual a AB y OA es igual a CB
3- vemos las componentes Fy a lo largo de OC y Fh a lo largo de OA
4- Encontramos la componente Fy = 130 cos 43° = 95.1
5- Determinamos la componente Fh = 130 sen 43° = 88.66
6- Descomponemos Fh en Fx = 88.66 cos 22° = 82.20 y Fz = 88.66 sen 22°=33.21
7- Expresamos F en sus componentes: F = (82.20 i + 95.1j + 33.21 k) kN





Determinación de la dirección de F
Cos ϴx = (82.20/130) = 0.63; ϴx = cos $^{-1}$ (0.63)= 50.94°
Cos ϴy = (95.1/130) = 0.73; ϴy = cos $^{-1}$ (0.73)= 43.11°
Cos ϴz = (33/130) = 0.255; ϴz = cos $^{-1}$ (0.255)= 75.22°

Problema 2



Dos cables BG y BH son atados al marco ACD como se presenta. Conociendo que la tensión en el cable BH es 750 n, determine los componentes de la fuerza ejercida por el cable BH en el marco en B.

$\cos \Theta x = (0.6)/1.8$; $\Theta x = \cos^{-1}(0.33)$; $\Theta x = 70.53°$
$\cos \Theta y = (1.2)/1.8$; $\Theta y = \cos^{-1}(0.66)$; $\Theta y = 48.19°$
$\cos \Theta y = (-1.2)/1.8$; $\Theta z = \cos^{-1}(-0.66)$; $\Theta z = 131.29°$

Comprobación

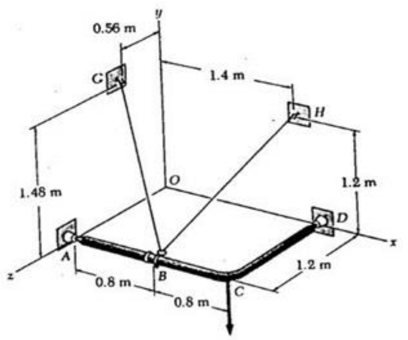
$\lambda_{BH} = ((0.6/1.8)^2 + (1.2/1.8)^2 + (-1.2/1.8)^2)^{1/2}$

$\lambda_{BH} = 1$

$dx = (1.4-0.8) = 0.6\,i$
$dy = (1.2 - 0)\,j = 1.2\,j$
$dz = (0 - 1.2)k = -1.2\,k$
$\lambda_{BH} = (dxi + dyj + dzk)/r$
$r = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$
$r = (0.6^2 + 1.2^2 + (-1.2)^2)^{1/2}$
$\mathbf{r = 1.8}$
$\boldsymbol{\lambda_{BH}} = [(0.6)i + (1.2)j + (-1.2)k]/1.8$
$\lambda_{BH\,x} = (0.6)i/1.8$
$\lambda_{BH\,y} = (1.2)j/1.8$
$\lambda_{BH\,z} = (-1.2)k/1.8$
$\mathbf{F_{BH}} = F\,\lambda_{BH} = 750\,(0.6i + 1.2j – 1.2k)/1.8$
$\mathbf{F_{BH}} = (250i + 500j – 500k)$ N
Comprobación
$\mathbf{F_{BH}} = ((250^2 + 500^2 + (-500)^2)^{1/2}$
$\mathbf{F_{BH}} = 750$ N

Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

Problema 3



Si TBG = 1800 N, Determine la resultante del sistema de fuerzas en el punto B

$dx = (0-0.8) = -0.8\ i$
$dy = (1.48 - 0)\ j = 1.48\ j$
$dz = (0.56 - 1.2)k = -0.64\ k$
$\lambda BG = (dxi + dyj + dzk)/r$
$r = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$
$r = (-0.8^2 + 1.48^2 + (-0.64)^2)^{1/2}$
$\mathbf{r = 1.8}$
$\boldsymbol{\lambda}\mathbf{BG} = [(-0.8)i + (1.48)j + (-0.64)k]/1.8$
$\lambda BG\ x = (-0.8)i /1.8$
$\lambda BG\ y = (1.48)j /1.8$
$\lambda BG\ z = (-0.64)k/1.8$
$\mathbf{F} = F\ \lambda BG = 1800\ (-0.8i + 1.48j - 0.64k)/1.8$
$F_{BG} = (-800i + 1480j - 640k)\ N$
Comprobación
$FBG = ((-800)^2 + 1480^2 + (-640)^2)^{1/2}$
$FBG = 1800\ N$
Recordando que:
$F_{BH} = (250i + 500j - 500k)\ N$
$Rx = \sum Fx\ ,\ Ry = \sum Fy\ ,\ Rz = \sum Fz$

$\lambda_{BH} = ((-0.8/1.8)^2 + (1.48/1.8)^2 + (-0.64/1.8)^2)^{1/2} = 1$
$Rx = -550i\ ,\ Ry = 1980\ j\ ;\ Rz = -1140\ k$
$\mathbf{R} = (-550\ i + 1980\ j - 1140\ k)\ N$
$R = ((-550)^2 + (1980)^2 + (-1140\ k)^2)^{1/2} = 2350\ N$

$\cos \Theta x = (-550)/2350\ ;$
$\Theta x = \cos^{-1}(-0.234)\ ;\ \Theta x = 103.53°$

$\cos \Theta y = (1980)/2350\ ;$
$\Theta y = \cos^{-1}(0.8425)\ ;\ \Theta y = 35.58°$

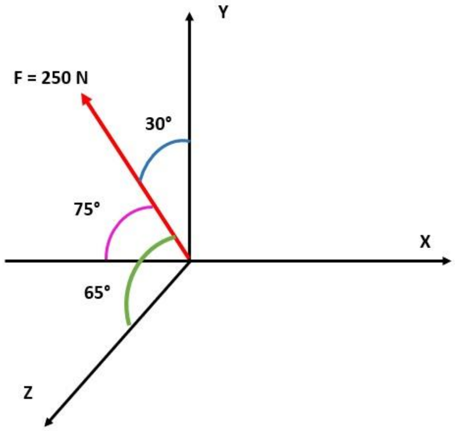
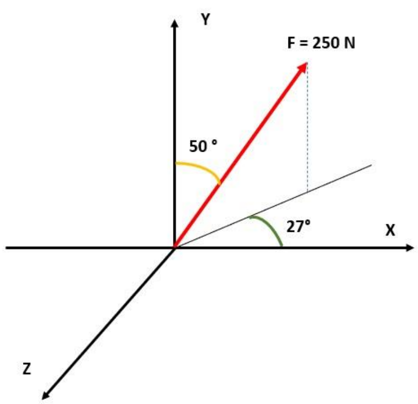
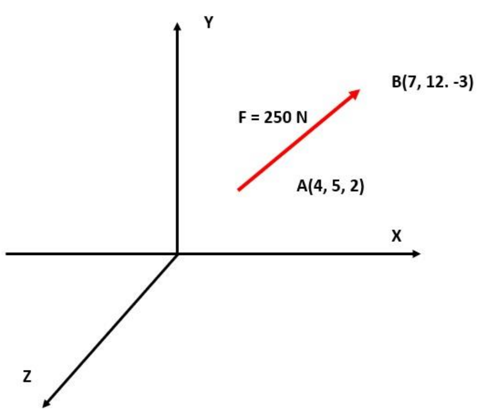
$\cos \Theta z = (-1140)/2350\ ;$
$\Theta z = \cos^{-1}(-0.4851)\ ;\ \Theta z = 119.019°$

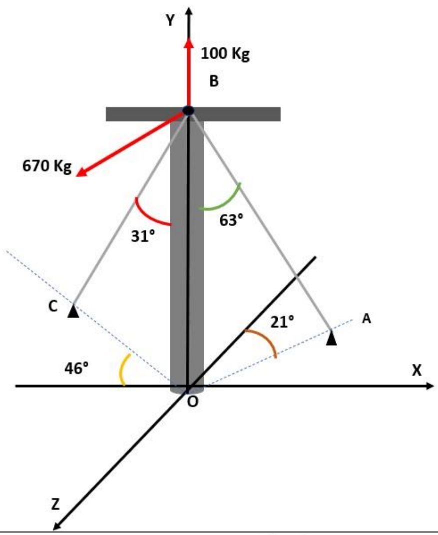
Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

2.11. Asignación o Tarea #2

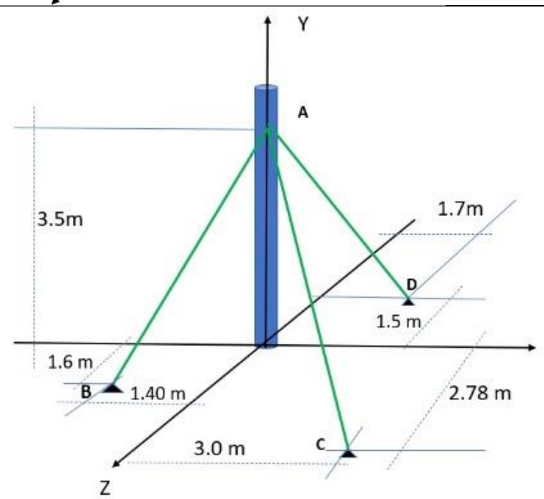
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
CENTRO REGIONAL DE PANAMÁ OESTE
MECÁNICA
ESTÁTICA DE PARTÍCULAS
Tarea #2

Nombre: ___________________________ **Cédula:** __________________________

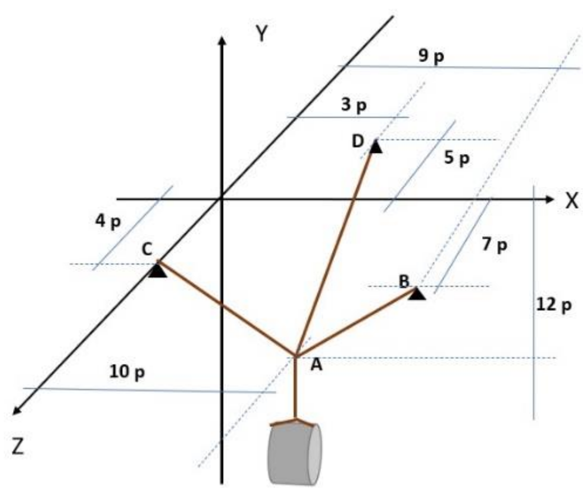
	1. Descomponga la fuerza dada en sus componentes rectangulares. Determine su dirección con respecto a los ejes coordenados. Presente la fuerza como vector.
	2. Descomponga la fuerza dada en sus componentes rectangulares. Determine su dirección con respecto a los ejes coordenados. Presente la fuerza como vector.
	3. Descomponga la fuerza dada en sus componentes rectangulares. Determine su dirección con respecto a los ejes coordenados. Presente la fuerza como vector.



4. Las acometidas para sostener el poste se presentan como los elementos BC y BA. Si la fuerza que ejerce el poste es de 1000 Kg en dirección vertical y 670 Kg en dirección horizontal paralela al eje z, determine la fuerza que ejercen los cables BC y BA.



5. Se utilizan 3 cables para sostener al poste en la posición mostrada. Si el cable AC soporta una tensión de 800 N, determine la tensión de AB y AD



6. La tubería de la figura es sostenida por los cables AB, AC y AD. Si la tubería tiene un peso de 1200 lb, determine la fuerza en los miembros AB, AC y AD.

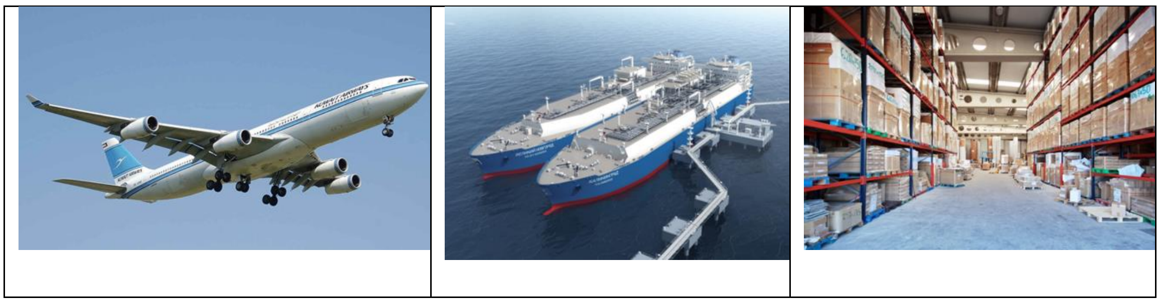
Capítulo III

3. Estática de Cuerpos Rígidos

3.1. Concepto de Cuerpo rígido

Se puede definir como aquel cuerpo que está constituido por varias partículas, en la cual hay que considerar el tamaño de este y las fuerzas pueden actuar en diferentes partículas del cuerpo.

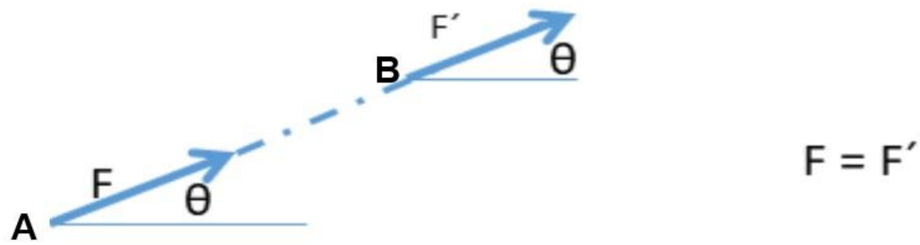
Figura No. 24. *Ejemplo de cuerpos rígidos*



3.2. Principio de Transmisibilidad

Este es un principio muy útil al momento de trabajar con vectores. Podemos trasladar una fuerza de un punto a otro, y esperar que cause el mismo efecto sobre la partícula si conservamos su magnitud, dirección (la misma línea de acción) y su sentido. Tal es el caso de la figura 25 en donde trasladamos la fuerza F del punto A hacia el punto B. Entonces, podemos decir que la fuerza F´ es equivalente a la fuerza F.

Figura No. 25. Principio de Transmisibilidad y fuerzas equivalentes

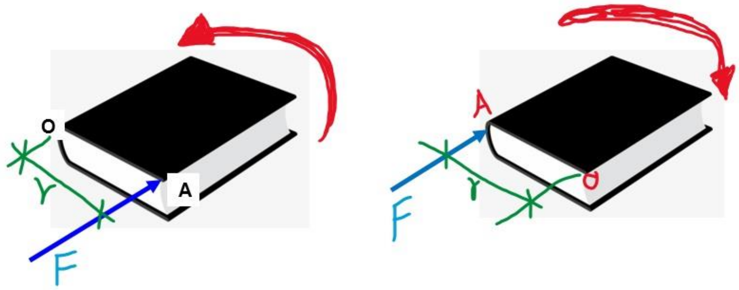


Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

3.3. Momento de una fuerza con respecto a un punto

El efecto que ejerce una fuerza sobre un cuerpo rígido depende del punto de aplicación de la fuerza. En las figuras 26 y 27 podemos ver que la fuerza produce sobre el libro una rotación. Si mantenemos fijo el libro en “O”, la fuerza ejerce un giro al libro en sentido contrario de las manecillas del reloj como se observa en la figura (a). Mientras que, en la figura (b) la fuerza está aplicada en el extremo izquierdo del libro y ejerce una rotación, pero en sentido horario. A este efecto de giro producido por la fuerza F alrededor del punto “O” se le denomina momento.

Figura No. 26. Momento alrededor de un punto



Fuente propia. *Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.*

El momento alrededor de un punto se determina como:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r X F}$$

En donde:

r es la distancia desde el punto de aplicación de la fuerza al punto donde se desea determinar el momento.

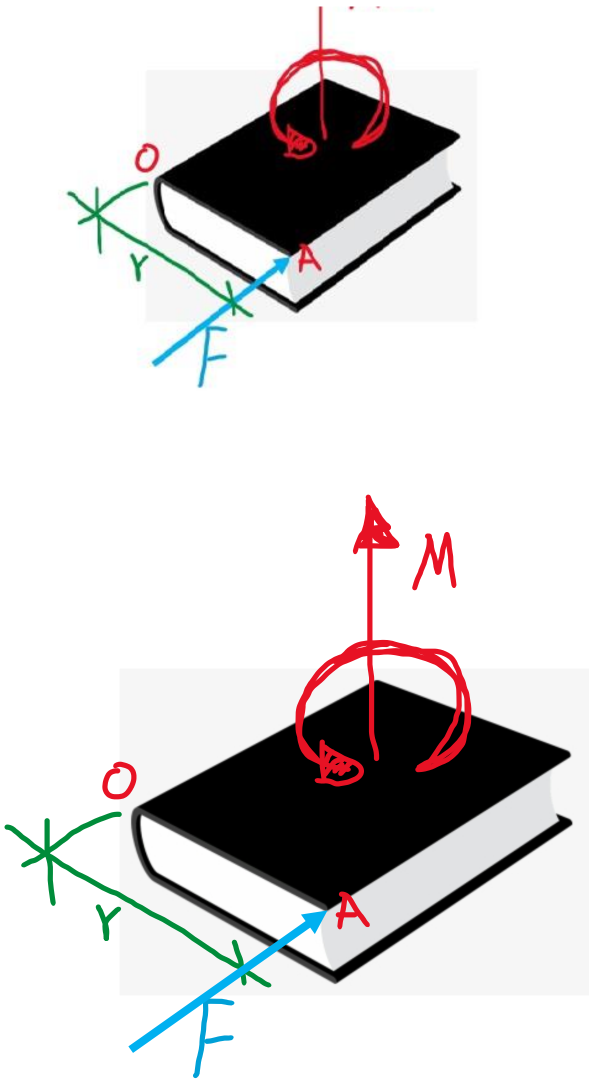
F es la fuerza aplicada al cuerpo.

M es el momento que produce F en un punto O a través de una distancia **r**

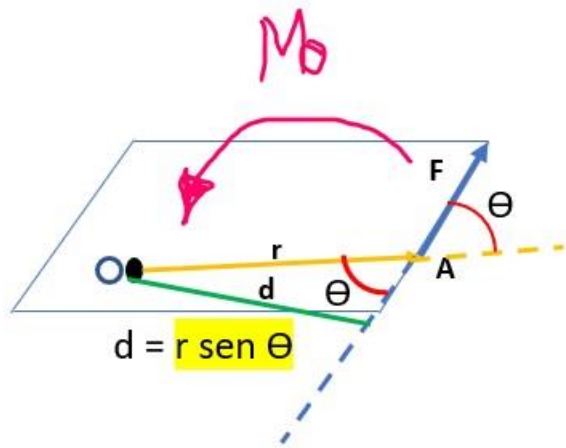
El momento es un vector que resulta del producto vectorial de dos vectores. Su magnitud es el producto de r X F, su dirección es perpendicular al plano que contienen a r y F y su sentido se determina a través de la regla de la mano derecha.

Tomada de: *Mecánica Vectorial para Ingenieros (Estática). Beer and Johnston*

Figura No. 27. Dirección del momento



Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.



Fuente propia. *Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.*

Si deseamos encontrar el momento con respecto a “O”, por definición es:
M_o= r X F

- Podemos extender las líneas de acción de F y r
- La magnitud de M = r X F sen Θ
- La magnitud de r por la magnitud de F por el seno del ángulo más pequeño entre r y F.
- Podemos arreglar la expresión:
- M = F X r sen Θ
- Si observamos la figura r sen Θ = d
- De aquí que la magnitud del momento es:
- M = F d.

3.4. Teorema de Varignon

Si tenemos un sistema de fuerzas actuando sobre una partícula A y deseamos encontrar el momento que realizan todas las fuerzas sobre el mismo punto “O” basta con encontrar el momento de cada una de las fuerzas con respecto al mismo punto “O” y sumarlos:

Mo = r X F1 + r XF2 + r X F3 + …+ r X Fn

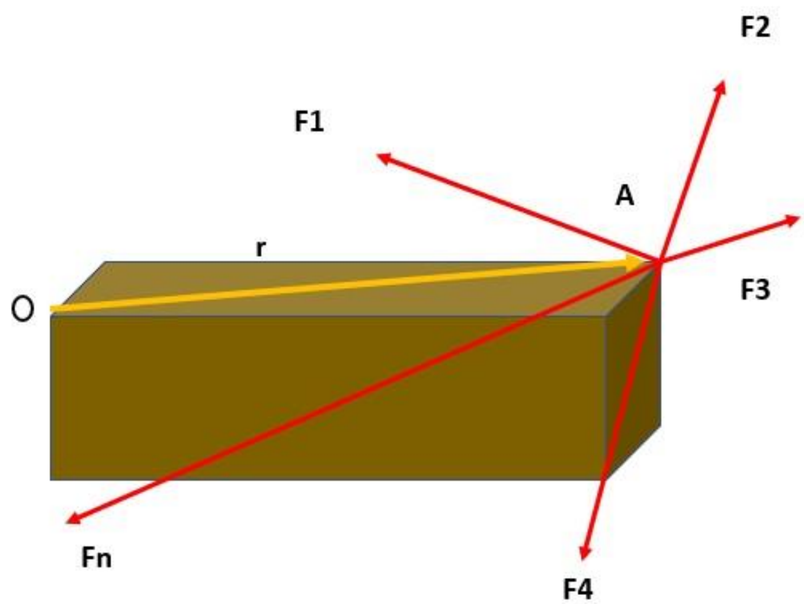
Si observamos, veremos que r es el factor común

Mo = r X (F1 + F2 + F3+…+ Fn)

Vemos que la sumatoria de las fuerzas dentro del paréntesis representa la Resultante de un sistema de fuerzas concurrentes. De manera que, el momento lo podemos expresar en función de la Resultante como:

Mo = r X R

Aplicando la propiedad distributiva del producto vectorial podemos utilizarlo para encontrar el momento de un sistema



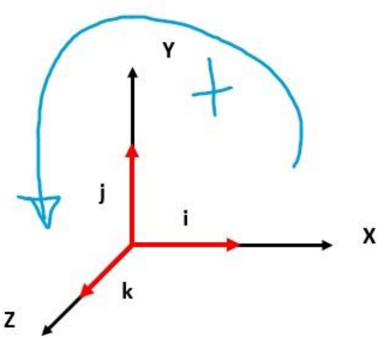
Fuente propia. *Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.*

Teorema de Varignon:

El momento de un sistema de fuerzas con respecto a un punto es igual al momento de la fuerza resultante de ese sistema de fuerzas con respecto al mismo punto.

Mo = r x F1 + r X F2 + r X F3 +…+ r X Fn = r X R

3.5. Producto vectorial de dos vectores



Fuente propia. *Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.*

Recordemos que, la magnitud del momento puede ser encontrada como: M = r X F sen Ɵ, (la magnitud de r por la magnitud de F por el seno del ángulo más pequeño entre r y F) y la dirección del momento es perpendicular al plano que contiene a r y F, o se puede buscar mediante la regla de la mano derecha.

Tomando en cuenta los vectores unitarios de la figura, tenemos en el sentido contrario a las manecillas del reloj, el producto vectorial:

i X i = 0 = (1)(1) sen 0° =0
i X j = k = (1)(1) sen 90° =1k
i X k = -j

j X i = -k
j X j = 0
j X k = i

k X i = j
k X j = -i
k X k = 0

3.6. Componentes rectangulares del momento de una fuerza

Si tenemos al vector fuerza **F** y al vector de posición **r** expresadas en sus componentes rectangulares asociados a los vectores unitarios i, j, k podemos expresar el momento como sigue:

F = Fxi + Fyj + Fzk, y
r = xi + yj + zk

M = r X F = (xi + yj + zk) X (Fxi + Fyj + Fzk)

M = (xi X Fxi) + (xi X Fyj) + (xi X Fzk) + (yj X Fxi) + (yj + Fyj) + (yj + Fzk) + (zk X Fxi) + (zk X Fyj) + (zk X Fzk)

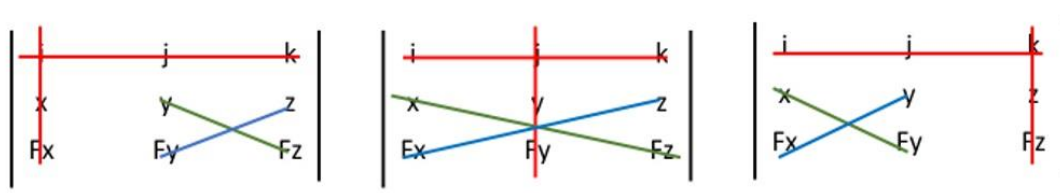
Aplicando el producto vectorial, tenemos:
M = (xFy)k + (-xFz) j + (-yFx) k + (yFz)i + (zFx)j + (-zFy)i

Arreglando la expresión
M = (yFz- zFy) i + (-xFz + zFx) j + (xFy –yFx) k
M = (yFz – zFy) i – (xFz – zFx) j + (xFy – yFx) k

El momento se puede expresar en sus componentes:
Mx = (yFz – zFy)
My = - (xFz – zFx)
Mz = (xFy – yFx)

Momento determinado mediante método de Determinante

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$



(yFz – zFy) i   - (xFz – zFy)j   + (xFy – yFx)k

Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

3.7. Práctica

Problema 1

r = 2i – 4j + 7k

F = 30i + 55j – 12k

Determine el momento de la fuerza F.

Problema 2

r = -7i + 10j -4k

F = 100i + 167j + 88k

Determine el momento de la fuerza F.

3.8. Asignación o Tarea

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
CENTRO REGIONAL DE PANAMÁ OESTE
MECÁNICA
ESTÁTICA DE CUERPOS RÍGIDOS
TAREA 1

Nombre: **Cédula:**

Dado r y F en sus componentes rectangulares, determine el momento, la magnitud y la dirección respecto a los ejes coordenados.

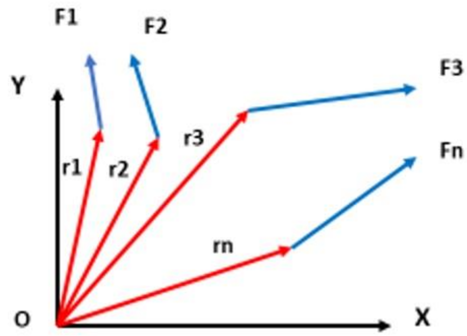
1	r = (-15i + 19j +31k) pulg	F = (2000i + 1500j – 3020k) lb
2	r = (21i + 17j - 45k) cm	F = (500i - 325j + 744k) kg
3	r = (3i -7j - 5k) m	F = (- 400i - 160j + 615k) kg
4	r = (-65i - 11j - 29k) pie	F = (-70i - 98j + 69k) kip
5	r = (400i + 575j + 327k) m	F = (150i + 135j - 820k) N

3.9. Resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes en el plano

Para determinar el momento de un sistema de fuerzas en el plano (coplanares) con respecto a un punto "O" como se observa en la figura, basta conque apliquemos la ecuación general de M.

$Mo = \Sigma(r \times F)$

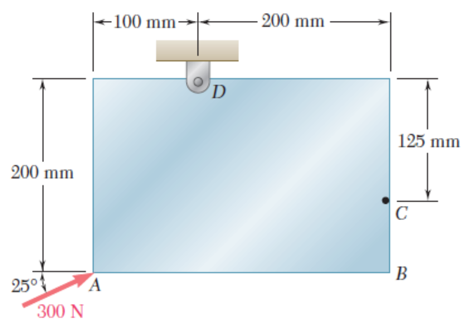
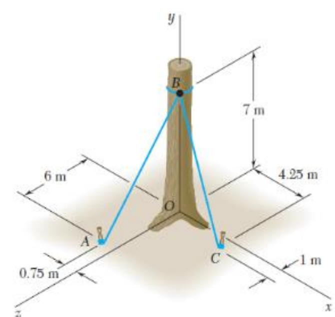
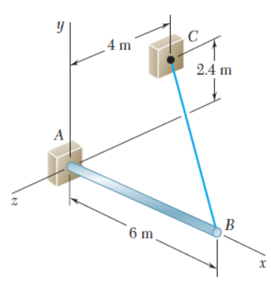
$Mo = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + r_3 \times F_3 + \ldots + r_n \times F_n$



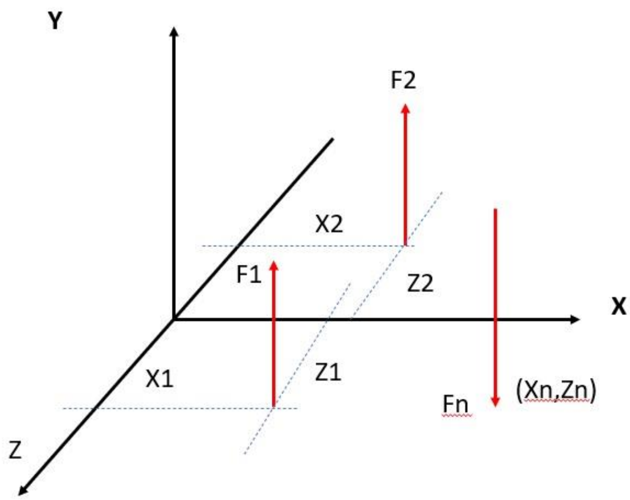
Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

3.10. Asignación o Tarea

ESTÁTICA DE CUERPOS RÍGIDOS
TAREA 2

<table>
<tr><td>Nombre:</td><td>Cédula:</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Una fuerza de 300 N se aplica en A como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza de 300 N alrededor de D.</td></tr>
<tr><td>Los cables AB y BC se sujetan al tronco de un árbol muy grande para evitar que se caiga. Si se sabe que las tensiones en los cables AB y BC son de 555 N y 660 N, respectivamente, determine el momento respecto de O de la fuerza resultante ejercida por los cables sobre el árbol en B.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>El aguilón AB de 6 m tiene un extremo fijo en A. Un cable de acero se estira desde el extremo libre B del aguilón hasta el punto C ubicado en la pared vertical. Si la tensión en el cable es de 2.5 KN, determine el momento alrededor de A de la fuerza ejercida por el cable en B.</td></tr>
</table>

3.11. Resultante de un sistema de fuerzas paralelas



Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

Si tenemos un sistema de fuerzas paralelas como las presentadas en la figura podemos obtener su resultante al sumar todas las fuerzas:

R = ΣFv=F1 + F2 + F3 + …+ Fn

El momento con respecto al origen, tomando en cuenta la ubicación de cada fuerza, sería:

Mo = (X1i + Z1k) x F1j + (X2i + Z2k) x F2j+…+ (Xni + Znk) x Fynj
Mo = (X1xFy1)k + (- Z1xFy1)i + (X2 x Fy2)k + (Z2 x Fy2)I + (Xn x Fyn)k + (- Zn x Fyn)i

En general, resulta:

Mo = Mzk + Mxi

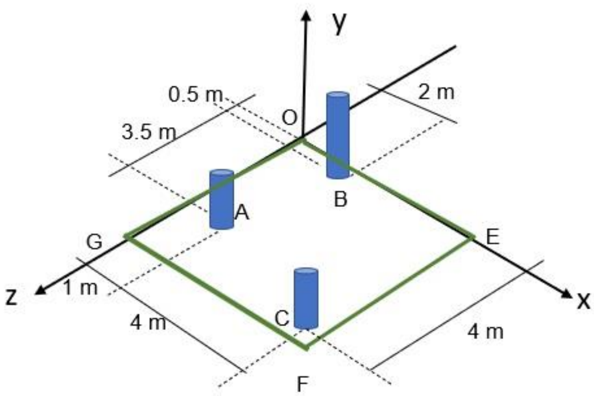
En donde:
Mx = ΣzFy
Mz = ΣxFy

Sabiendo que ΣFy = R, Podemos ubicar la posición de la Resultante como:

X = Mz/R
Z = Mx/R

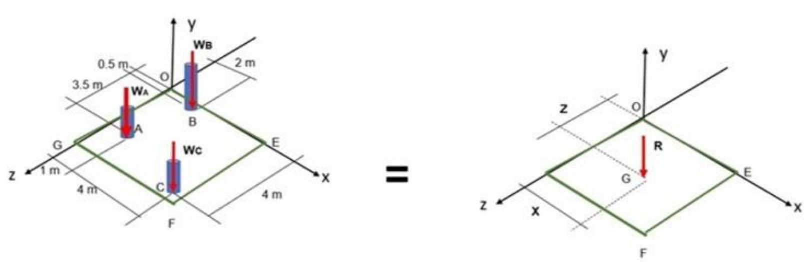
3.12. Problema de práctica:

Tres cilindros se encuentran en la posición indicada en el dibujo. Si el peso de los cilindros en A, B, y C son de 300 Kg, 250 Kg y 430 Kg, respectivamente, determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante del peso de los tres cilindros.



Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

Aplicando el Teorema de Varignon: La suma de los momentos de cada una de las fuerzas con respecto a un punto, es igual al momento que ejerce la resultante R con respecto al mismo punto = $\mathbf{\Sigma\ r_i\ XF_i = r_G\ X\ R}$



Determinación de la resultante del sistema de fuerzas paralelas:

R = ΣF = (-300 - 250 - 430) j = - 980 j Kg

R = 980 Kg ↓

Momento de cada una de las fuerzas con respecto al punto O

$\mathbf{\Sigma\ r_i\ XF_i}$ **:**

$(\mathbf{Mo})_A$ = (1i +4k) X (-300j) = (1200 i -300 k)

$(\mathbf{Mo})_B$ = (2i + 0.5k) X (-250j) = (125 i – 500 k)

$(\mathbf{Mo})_C$ = (5i + 4k) X (-430j) = (1720 i -2150 k)

Sumatoria de los momentos individuales:

ΣMo = (3045 i -2950 k) Kg-m

Determinación del momento de la resultante:

No sabemos dónde se ubica y diremos que: $\mathbf{r_G = xi + zk}$

(**MoR**) = r_G X R = (Xi + Zk) X (-980j) = (- 980 X)k + (980 Z)i

Teniendo la resultante y los momentos sobres los ejes X y Z, podemos obtener la ubicación de la resultante, como sigue:

(MoR)i = 3045i

980 Z = 3045

Z = 3045/ 980 = 3.12m

(MoR)k = -2950

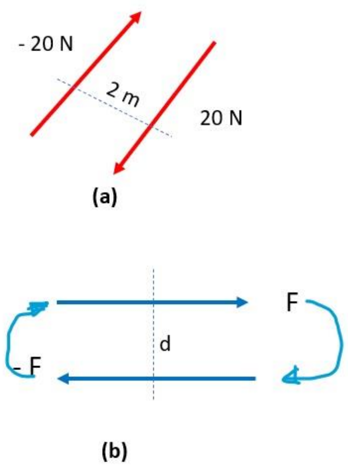
(-980 X) = -2950

X = 2950/980

X = 3,01m

3.13. Momento Par:

Momento Par



En la figura (a), se presenta un par de fuerzas paralelas de 20 N, separadas por una distancia perpendicular de 2 m.

El efecto que generan sobre el cuerpo en el que actúan es de rotación o momento.

En la figura (b), en general, la magnitud del momento podemos podemos obtenerla como: M = Fd⊥.

Su dirección es perpendicular al plano que contiene a F y d, y

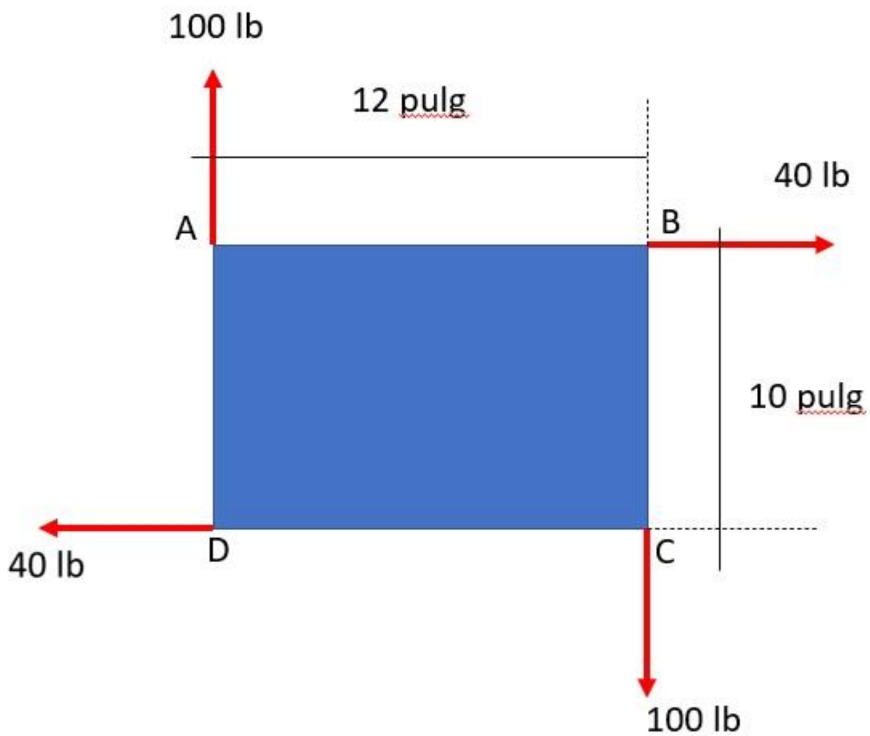
Su sentido se determina mediante la regla de la mano derecha u observando el giro que se genera entre las fuerzas

Nota. Fuente propia. Adaptad de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

3.14. Práctica

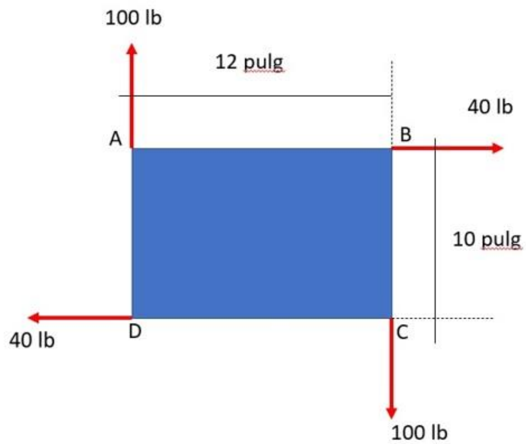
Problema: Pares de fuerza

Cuatro fuerzas se aplican a la plancha de acero como se indica. Determine el par resultante que actúa sobre la plancha.



Solución

Cuatro fuerzas se aplican a la plancha de acero como se indica. Determine el par resultante que actúa sobre la plancha.



El momento resultante puede determinarse por la suma de los momentos que ejercen cada uno de los pares mostrados en la figura.

Si observamos existen dos pares de fuerza:

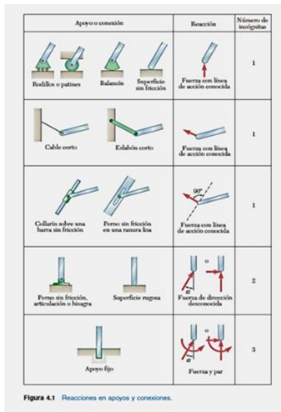
- Uno horizontal compuesto por las fuerzas de 40 lb
- Uno vertical compuesto por las fuerzas de 100 lb

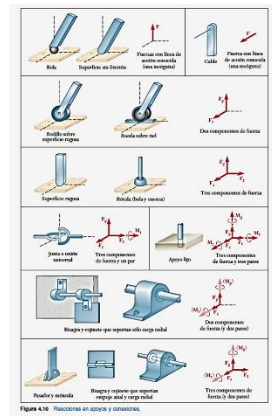
La magnitud del momento de cada par de fuerzas puede obtenerse por $M_{\mathbf{par}} = Fd_{\perp}$,

- Fd = (100 lb)(12 pulg) = 1200 lb-pulg
- Fd = (40 lb)(10 pulg) = 400 lb-pulg

El Momento resultante es:
MR = (-1200 – 400) = -1600 lb – pulg, ó
MR = 1600 lb – pulg

3.15. Apoyos comunes para los cuerpos rígidos





(a) Apoyo para los cuerpos rígidos en el plano

(b) Apoyos para los cuerpos rígidos en el espacio

Nota. Tomada de Mecánica Vectorial para ingenieros, Ferdinand P. Beer

Nota. Fuente de Mecánica Vectorial para Ing. Estática, Beer, F.

3.16. Equilibrio de cuerpos rígidos en el plano

Para que un cuerpo rígido que se encuentra en el plano XY esté en equilibrio debe cumplirse lo siguiente:

$\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma M_z = 0$

Sin embargo, no son las únicas ecuaciones que pueden plantearse, por ejemplo:

Se puede plantear una ecuación de fuerza y dos de momentos:
$\Sigma F_x = 0$; $\Sigma M_A = 0$; $\Sigma M_B = 0$
Se puede formular tres ecuaciones de momento:
$\Sigma M_A = 0$; $\Sigma M_B = 0$; $\Sigma M_C = 0$

3.17. Práctica

Determine las reacciones de la viga mostrada.

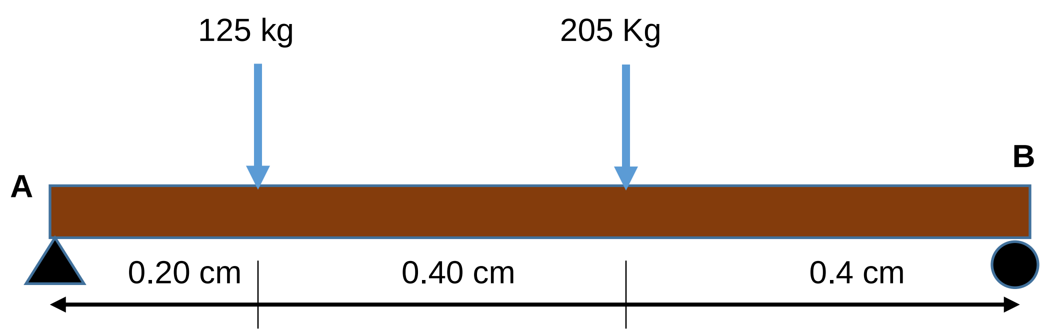
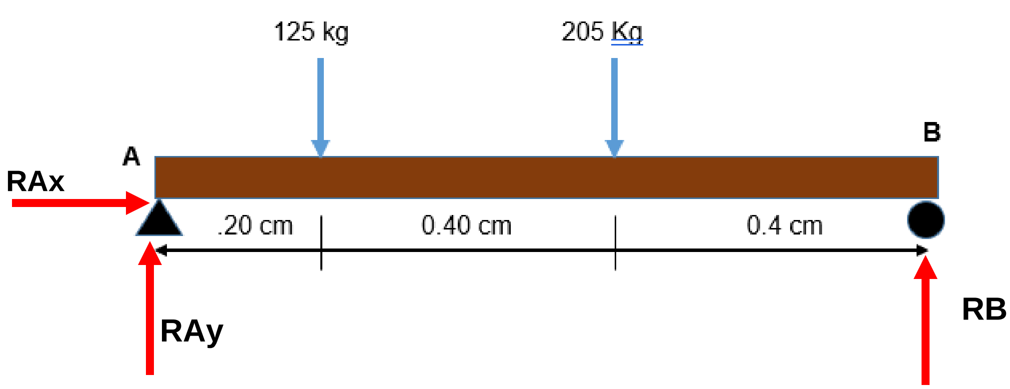


Diagrama de cuerpo libre (D.C.L.)



$\Sigma Fx = 0$,
$RAx = 0$

$\Sigma MA = 0$ (+)

$-125 (0.2) -205 (0.6) + RB (1) = 0$
$RB = 148$ kg

$\Sigma MB = 0$ (+)

$205 (0.4) +125 (0.8) – RA (1) = 0$
$RA = 182$ kg

3.18. Retroalimentación del problema

- Como se observa en A existe un apoyo articulado. Este posee 2 componentes de reacción: en X y Y
- En B hay un apoyo de Rodillo, el cual posee solo una reacción
- Todas las incógnitas se sugieren sean positivas
- Para resolver el problema se debe hacer el D.C.L.
- Al hacer momento en A ambas fuerzas giran a la derecha o a favor de las manecillas del reloj, pero la reacción en B lo hace, al contrario
- Al hacer momento en B el proceso es inverso al punto anterior
- Cuando se obtiene la respuesta, es necesario señalar la dirección y sentido de las reacciones, pues son vectores.

Bibliografía

Beer, F. y Johnston, R. “Mecánica Vectorial para Ingenieros (Estática), Séptima Edición, McGraw Hill.